# 漫谈数学的学习和研究方法

## ——献给青年数学爱好者

徐利治　著

张亚军　校订

大连理工大学出版社

## 内 容 提 要

本书收录近年来徐利治教授为青年数学工作者撰写的论述数学学习和研究的文章12篇，多数已在各种杂志和报刊上发表过，这次又经作者作部分修改发表。收入本书的著作和文章有：《浅谈数学方法论》、《数学方法纵横谈》、《谈谈学数学》、《谈自学成才》、《直觉与联想对学习和研究数学的作用》、《欧拉的方法、精神与风格》、《略谈科学计算在理论研究中的作用》等。本书语言生动、以史为鉴，是数学学习和研究的经验谈，适合大中学生、研究生、青年教师和自学青年阅读。


**漫谈数学的学习和研究方法**

Mantan Shuxue de Xuexi he Yanjiu Fangfa

大连理工大学出版社出版、发行（大连市甘井子区凌水河）　　大连理工大学印刷厂刷印

开本：850×1168　1/32　　印张：$3\frac{5}{8}$　　字数：94千字

1989年11月 第1版　　1989年11月 第1次印刷

印数：0001—6000 册

责任编辑：王君仁　　封面设计：葛　明

责任校对：寸　土

ISBN 7-5611-0161-9/O·26　　定　价：2.00元



徐利治教授，1920年生，江苏省沙洲县（今张家港市）人。现任大连理工大学应用数学研究所所长。在1945—1988年间，曾先后在国内外数学刊物上发表论文130余篇。其主要著作请见本书第110页。

# 目　　录

# 谈自学成才（代序）

祖国四化建设急需人才，所以近年来全国各地涌现出了大批自学成才的人。

自学成才之路是非常宽广的。人要自学成才，一定要有理想、志趣、毅力和方法。我想理想是最关键的。早年我曾读过一些革命家、科学家和事业家的传记故事，体会到他们的成就和贡献，都和他们高尚的人生理想分不开。例如，他们都在青年时代就立志要做一个有益于社会的人，要做一个对国家社会有贡献的人。这样一种理想或抱负便成为激励他们永远奋发向上的积极动力。结果往往是"有志者事竟成"。

理想的具体化就是"立志"。"志"是需要相应的德性和情操才能使它逐步完善并得到实现的。至于各种各样个人野心家的歪志，当然是经不起历史考验的。这在人类历史上已有无数的例证了。

一般成才者都离不开自学、即使读完了大学也还要靠自学。例如，我早年毕业于西南联大数学系，后来成了大学教授。但是，在我现有的数学知识中，至少约有百分之七十以上的

知识是通过长年累月的自学方式取得的。我认为，任何学校教育，都不能代替自学的功效。只有自学才能最有效地获取活知识，并能有效地培养独立工作能力和创造才能。中国历史上的诸葛亮就没有进过高等学府，英国的电磁学鼻祖法拉第，美国博学多才的发明家富兰克林等，连中学教育都没有完成，他们都是自学成才的光辉例子。事实上，人们从中外历史上可以找到无数自学成才的实例。

“行行出状元”，自学可以结合各自的生活环境、职业、工作实践来进行。但高尚的志趣、坚韧不拔的毅力和正确的自学方法确实是不可缺少的条件。而这些都是和正确的理想分不开的，所以人生理想和理想的力量是支配一切的。

自学主要靠自己，但又不能独学而无友。要找志同道合的朋友相互切磋和互相勉励。此外，不同行业之间的人也可成为学习上的好朋友和好老师。因为不同领域的知识经验的交流，能使自己耳目一新，获得许多新的见识和有用经验。事实上，人们的头脑具有转移经验的能力，经验一经转移，就可能使自己的工作事业获得更大成功。自学成才者往往不是孤军作战的，如果只凭“个人奋斗”那是不可能作出更大贡献的。

“自学”，不限于只学“书本知识”。但书本毕竟是人类知识经验的“载体”，能使人很快地从中取得大量间接性的宝贵经验和知识，所以，读书是自学过程中的重要环节。

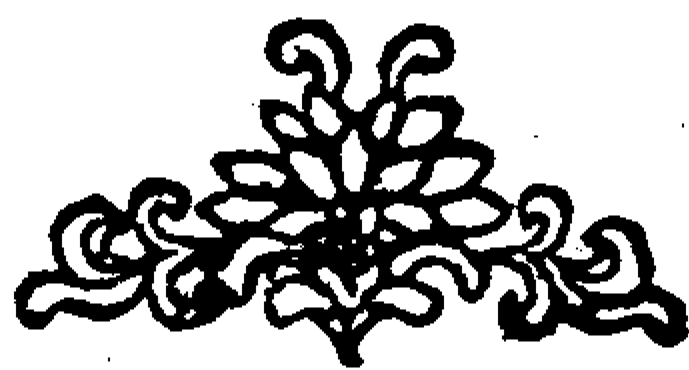
不少人提倡“博览群书”。实际上在十分有限的人生时间里，任何人都只能选读一部分对自己工作职业最为有用的书籍，真要做到“博览群书”是不容易的。但是我们仍赞成这样的观点；人脑的知识库藏、不应太单调太贫乏。不论是哪行哪业，都需读点哲学书、历史书和文学书。

特别是，辩证唯物主义的哲学，是一种发展着的活的哲学，它可以指导一切。历史书使人明辨是非，且能培养爱国意识和高尚情操。至于优秀的文学作品则往往能够陶冶性情，激励人们进

取向上的奋发精神。我相信，对国家社会能作出贡献的自学成才者，都是需要有一点哲学头脑、历史知识和文学爱好的。

“博览群书”在一时一地固然不易作到，但在人生过程中，如能把它作为一个不断追求的目标，并能不断地从有选择的“群书”中吸取有益的智慧和力量，那也是一种人生的快乐。如果养成了喜欢读书的好习惯，那就能经常从百忙中挤出时间去涉猎开遍着智慧之花的书林了。

以上谈了对自学成才的一点看法，很不全面，仅供有志自学成才的青年们作参考。



本文选自兰州大学出版社《名家谈自学》一书，1988 年 10 月出版。

# 漫谈学数学

现代社会的青少年往往要把不少时间花在数学学习上，这是适应社会进步发展需要的好现象。有人调查过，法国所以成为数学人才辈出的国家，就是因为一贯重视中学数学教学的缘故。这里我想和高中程度的青年们来漫谈一次学习数学的方法问题。

我想谈的是这样五个字：懂、化、猜、析、赏。

什么叫"懂"？懂的含义是有不同层次的，比如一道难题，老师一步步把它解出来了，每步都看明白了，这就觉得懂了，其实这样的懂只是一种"浅懂"或"表面的懂"，未必是真正彻底懂了。这叫"见树不见林"。学习数学也是这样，真正的懂就是要有整体性的理解，就是说要弄明白整个思路的来龙去脉，还要彻底理解它所以如此如此的道理。

恩格斯早就阐明过，数学的对象是空间形式和数量关系。数学的解题过程或推理过程，就是要去寻找或证明某种客观存在的形式或关系，所以全部过程也有其客观必然性。因此，你只有把它理解得非常自然，非常直观，直至

成为你心目中一目了然的东西，那才真正变成你自已的知识财富，这时候，你就能使用自己的语言很自然地而不是背誦式地去表述你所理解的一切。当然，“强记”在你脑子中就毫无必要了。

比如，你能用数学归纳法去证明二项式定理，你可以认为二项式定理已经懂了。但真正的懂不能只停留在形式推理上，你还必须懂得函数展开式为什么必然是那个样子，而且二项式系数所以成为组合数的道理。这样，你才真正从全局上直观上把握住二项式定理的实质。

真正的懂离不开数学直观，因此数学直观力的培养非常重要。在学习过程中，处处多问几个为什么，尽量通过几何图形的直观比拟或是若干具体例子的观察比较，来想清楚种种数量关系或空间形式的必然性，这就有利于培育你的直观力。

数学直观力也是导致发明创造的一种能力。81 世纪卓越的物理学家麦克斯威尔，有着把每个数学物理问题在头脑中构成形象的习惯，所以他能有重大的发现和创造。还有杰出数学家欧拉的许多发现，也都是凭借明快的数学直观力来获得的。欧拉一生勤于计算，因而熟能生巧，常能从算例中归纳出一般公式来。他还喜欢作类比、联想、试算（实验）和观察，而这种工作方法正是使他不断产生数学直观力的重要条件。

现在来谈“化”这个字。比方，当朋友弄不明白你的说话意思时，你会来一个“换句话说”。这就是保留原意而改变表述形式的意思。在处理数学问题时，往往需要若干次的“换句话说”才能把原来的问题化难为易、化繁为简或是化生为熟。所以数学中的“化”就是指化简、化归和变化形式的意思，国内外有不少数学竞赛题实际就是要考人们“化”的本事。

学习几何与代数时，你会遇到“必要条件”，“充分条件”、“充要条件”等重要概念。当你试着去化简或者变换一个数学问题及其条件的表述形式时，就得作些演算或者按照充要条件这一

概念去进行演绎推理。又如果采用的是反证法，那么只须否定推理结论中蕴含的必要条件就够了。不管怎样，要学好化的本事，必须养成计算的精确性与推理的严谨性精神。这种基本功是要靠早年培养的，要是错过了青年时代，那就好比让中年人再去练少林寺那一套无懈可击的武功那样，势必会感到事倍功半了。

青年人要学好数学，还需要学会猜想、分析和鉴赏，这就是我在上面提到的猜、析、赏三个字。

如果你有机会去读一点数学家欧拉的传记，或者去选读 G. 波利亚的名著《数学与猜想》里的有关章节，你就会知道数学中的许多漂亮公式和定理并不是靠什么“天才的灵机一动”想出来的，而是通过不厌其繁的归纳、类比、细心观察等过程猜想出来的。但是猜想只是帮助发现真理，最后还须补上一丝不苟的证明，才能把猜到的真理变成为数学的定理或公式。

举一个例，当你把自然数的立方（从 1 开始）由小到大依次相加起来，你就会发现依次得到的总和都是平方数，于是你就不妨作一个大胆猜想：“从 1 开始，n 个自然数的立方总和恰好是一个平方数。”如果细心观察一下，还可进一步猜想上述的总和正好等于 n 个自然数总和的平方。这样，如果你猜得不错的话，那就是一项很有趣的发现。但是为了验明你猜想到的公式普遍成立，你还必须应用数学归纳法给以一个严格证明。

其实，一切科学领域的重大发现，大多是依靠合理猜想得出的。牛顿就曾有过经验之谈：“没有大胆的猜想，就做不出伟大的发现。”所以你学习数学，想要有所作为的话，就非得学会猜想不可。但是要学好猜想的本事，却必须培养三种品质，即勤奋、勇敢和细心。这就是说，要学习欧拉那样，不怕麻烦，勤于计算，勤于观察，且能大胆设想，细心求证。

不可忘记数学是解决问题的工具，你想掌握好这种工具，一定要喜欢去求解各种数学应用题。在解决应用问题的过程中，你需要使用数学中常用的语言、概念、符号，把问题中涉及的全部

条件表述成数学形式。所谓“数学形式”可以是关系式、方程式、几何图形及算法程序等。正是利用数学形式才便于求得问题的解答。但是数学形式是需要通过抽象分析思考得出的。因此多做应用题就能磨练你的抽象思考能力和分析能力。

最常用的一种分析法叫作“逆推法”，就是倒转过来研究问题的方法。当你猜到一个问题的结论但不知如何着手证明时，你不妨把“结论”当作已知“条件”一步步倒退探索，这样就会摸清楚通向“结论”的道路和起点。然后再一步步返回结论。事实上，数学上的许多定理和公式，都是可以采用这种逆推法去重新发现他们的证明方法和推导过程的。

最后我想谈谈数学的鉴赏问题，主要是怎样领会数学美的问题。马克思早就指出过，人类社会的生产是遵循美学原则的。当然，作为精神生产物的数学知识也是符合审美标准的。比如几何学，从很少几条不证自明的简单公理出发，经由演绎法井井有条地导出一系列推论和定理，使得整个理论结构表现得十分协调和谐，这不正好象是座构造高雅的建筑物那样优美吗？

你也许会有经验，当你观察二项式系数组成的杨辉三角时，你会发现某种“对称性”带来的美感。又如果仔细欣赏圆周角定理时，你还会感受到某种变化中隐含有“不变性”的美。特别是当你学懂立体几何中的著名定理“球面面积正好等于它的大圆面积的四倍”时，你或许会产生某种惊叹，而这条定理正好显示出几何学中的“奇异美”，即一种出乎意料之外的美。

数学里的数学美是到处可见的：基本概念的简单性，定理与公式的普遍性与统一性，方法的精巧性等等也都是数学美的特征。有些人把数学看成为枯燥无味的科学，甚至望而却步，视为畏途。那真是一种误解或偏见！但正如欣赏中国的字画或西方的交响乐那样，感受数学美是需要一个学习和领会的过程的。只有当你对数学题材理解得越深刻，你才越能领会到“数学美”的享受。这样你就越能喜爱数学，从而越钻越深，而决不会产生任何

困倦或厌烦。数学是青年们准备向科技进军的重要工具，但愿大家都能喜爱它、学好它！



本文是作者应中国青年报之约写的文章，原载《中国青年报》1985年3月26日及4月2日。收入本书时作了文字上的校订。

# 数学方法 ⊙ 纵横谈

一说到数学方法，人们可能会有各种不同理解。譬如，教师多半会把它看作是解题方法或证题方法，工程师会把它理解为数学模型方法与计算方法，自然科学和社会科学工作者常常把它看成为描述客观规律、进行定量分析的工具，等等。着眼点虽然不同，但大家都会承认数学方法的特点是它的“逻辑精确性”和“对象的一般性”。不难理解，这种特点主要是由于数学的抽象性本质决定的。下面的个别段落将会涉及这个问题。

## 莱布尼兹的严格论证

17世纪著名的哲学家兼数学家莱布尼兹是一位博学多才的人物。他和巴斯卡都是欧洲历史上设计数字计算机的先行者，而且他还是“数理逻辑”这一学科思想的启蒙人。他曾经梦想并预言过严格的逻辑演绎方法可作为处理人类理性思维的普遍工具。我们不妨瞧瞧他是如何一丝不苟地利用演绎法来论证 $2\times2=4$ 的？他的证法分 6 步，即

$$2\times2=2\times(1+1)=2+2=2+(1+1)$$
$$=(2+1)+1=3+1=4.$$

这里依次用到了乘法分配律和加法结合律，还用到了个别自然数 $2=1+1$，$3=2+1$，$4=3+1$ 等定义。

很奇怪，为什么对这样一个连小学生都一目了然的问题都要一步步去证明呢？当然谁也不能否认 $2\times2=4$ 的直观明显性。但人们的直观思维往往是跳跃式的，假如不去彻底分析一个命题的逻辑演绎性结构，那么如何能使只会按程序办事的计算机去执行推理任务呢？正如大家所知，事实上现代电子计算机之所以能够精确地执行逻辑分析和各种复杂计算等任务，正是由于有了数理逻辑与程序设计等学科兴起的原故，而这也就是当年莱布尼兹"梦想"在一定程度上的实现和发展。

数学中的演绎法体现了逻辑精确性，但数学中大量的真理却往往是通过不严格的直观认识和经验归纳法获得的，而严格的演绎论证则多半是事后补上的。例如，从欧几里德时代到19世纪，人们早就根据几何直观认识到无理数的运算法则，如$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$等。但怎样严格地去证明无理数的加法和乘法也适用交换律呢？这个很困难的问题直到1872年才由戴得金和康托尔等人所建立的实数理论获得彻底解决。顺便提一句，现代数字电子计算机不管计算效率多么高，却只能处理有限性的离散数量，而对于涉及无限过程的无理数，还是无能为力的。

## 数学抽象方法与模型方法

当人们借助代数方程去求解应用问题时，常把未知数量设为 $x$，$y$ 等，并将已知条件表现为代数方程式。这过程就是抽象方法。因为 $x$，$y$ 等仅是具体数量的代表记号，而方程式也只是对应地反映了数量间的一种纯粹的相互关系，其中已经舍弃掉具体

事物的特定名称和相互关系的具体解释等非本质性的东西。

一般，对于任何一个涉及数量关系的具体应用问题，借助于数学符号、术语或数学概念来进行抽象，再把它对应地表现为数学形式后就成为原来问题的“数学模型”。代数方程是一类代数应用问题的模型。各种微分方程是各类运动形态问题的数学模型。网络图、计算程序、各种数学关系式等也都是各种具体对应事物（或现实原型）的数学模型。特别是象网络图这种数学工具常被作为交通运输问题的数学模型，许多复杂的实际问题可利用这类数学模型获得解决。

数学模型方法已成为现代一切应用科学领域中的重要方法，甚至象国民经济领域中的许多数学问题也往往利用模型方法来处理。

有时某些实际问题所表现的现实原型是非常复杂的，数学模型与现实原型的关系是一种反映与被反映的关系，所以模型的构造或提出必须经过抽象分析过程，即经过对现实原型扬弃次要环节的过程。就这一点来看，具有一定普遍意义的数学模型就有点象文学创作中的人物典型塑造那样，都无非是某些现实原型的本质或特征的近似刻画与集中表现而已。但数学模型可以进行逻辑分析甚至还可以用计算机加以模拟，这一点和文学典型的抽象性大不相同。

## 关系映射反演原则

数学家与物理学家解决许多问题时常常灵活运用“关系映射反演原则”。事实上，我们在日常生活中有时也自觉或不自觉地运用这个原则，如对着镜子梳头或剃胡子，镜子便是一个映射工具，它把头发、梳子、胡子、剃刀等原象及其相互间的位置关系都映射成镜子中的映象及映象关系。人们看着镜子里的映象便调整映象关系，使镜子中完成了合适的梳头和剃胡子的动作。显然

这是因为原象和映象是一一对应的，而一切映象关系都能相应地“反演”为原象关系的原故。

上述平凡的例子足以启发人们去形成一个解决数学问题的普遍思想方法。本来，象函数、反函数、变换、反变换等概念都是数学中最常用的概念，在本质上它们都是“对应”与“逆对应”一般概念的特殊形式。现代数学中已习惯地把对应与逆对应称之为“映射”(mapping)与“反演”(inversion)。它们是数学中极为有用的概念。现在假设在一个关系结构系统（A）中包含一个待定的未知原象X，如果直接在（A）中寻求X很不容易，那么就应该去选取一个合适的映射工具（对应方法或变换方法），使系统（A）映射成系统（B），这样相应地未知原象X也就映射成（B）中的映象X*。如果X*能在（B）中较易地确定出来，则通过逆映射（反演）也就可以从确定出原象X。这个一般性方法模式就称为数学中的关系映射反演原则，可表述为下列框图(图1)。

这个原则看起来十分简单，但要真正用好它去解决问题，关键还在于怎样选择好映射方法，这一步有时并不很容易，需要看透系统的结构规律和问题本质，甚至还要借助于类比联想才能发现最有用的映射工具。如果有幸发现一个巧妙映射方法能解决一大类问题，那就将是数学上的一大创造发明。下面举几个著名例子。

“对数方法”是解决数值计算的有效工具，它能把复杂的计算任务化为简易的计算工作，其基本思想就是把真数计算化为对数计算，最后再取反对数以求得真数。容易理解，取对数相当于作映射，求反对数是作反演，而对数表就是反演工具。所以纳皮尔发明的对数方法就是运用映射反演原则的光辉例子。

欧拉和拉普拉斯是生成函数方法（幂级数变换法）的创始人。利用幂级数变换可以顺利地求出差分方程的生成函数，最后求出生成函数的幂级数系数（相当于变换的反演），这样就可获得差分方程的一般解。这个过程也是关系映射反演方法的一例，

差分方程与初始条件是一种关系结构，而幂级数变换就是映射工具。

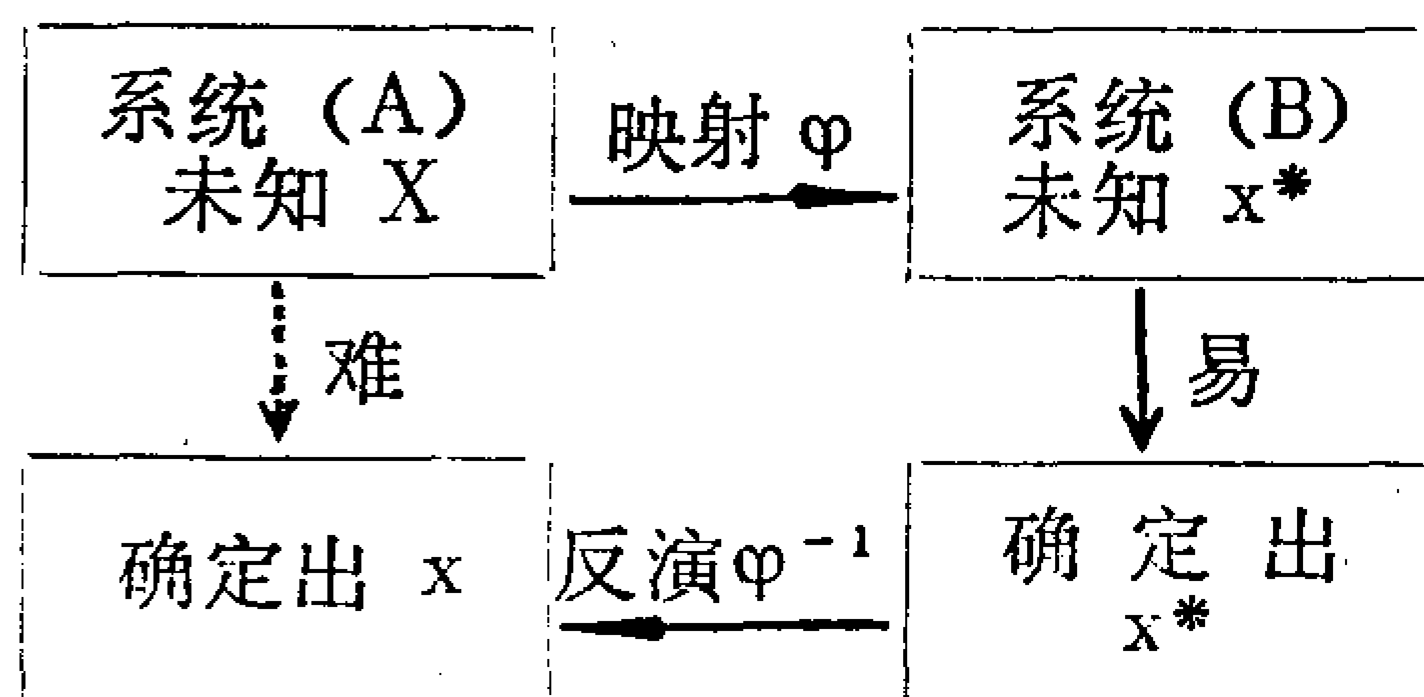



图 1

由于差分方程能与微分方程作类比，而后者是前者的连续化形式，于是就使拉普拉斯联想到幂级数变换的连续化形式（即某种积分变换）能成为求解微分方程的映射工具。一点不错，由这个很自然的类比联想所发现的拉氏变换及其反演公式确实已成为求解微分方程的有效工具。这也是符合关系映射反演原则的一个光辉例子。在拙著《数学方法论选讲》的第三讲中曾介绍了十来个例子，有兴趣的读者可以参考。

## 数学中的直觉与逻辑

一谈到数学领域中的创造、发明活动过程及其规律性，就会立即使人联想到直觉与逻辑、归纳与演绎等方法所扮演的角色和交互作用等问题。大家知道，历史上凡是有杰出贡献的数学家，几乎无例外地都是运用归纳法与类比法的大师。例如，最擅长于演绎论证的高斯也曾自称他的许多结果是利用归纳法猜到的，而证明只是补行手续。实际上，正如波利亚所说，在从事创造性活动的数学工作者，总是按照“不断猜想、不断论证”的方式进行工作的。波利亚的名著《数学与猜想》已在国内出版，这是值得一读的。

这里专门谈谈直觉与逻辑在数学研究方法中的地位问题。大

家知道，18至19世纪数学家与物理学家曾给数学武器库增添了大量宝贵财富，这些财富大多是通过数学直觉俘获来的"战利品"，正如阿达玛指出的，逻辑在这里起到了验收"战利品"的作用。事实上，从事数学创造性研究如同人在迷雾中摸索前进那样，需要用眼睛辨识方向，要靠双腿迈向目的地。直觉就好比眼睛，起向导和领路作用。逻辑就是双腿，没有逻辑不可能到达目的地。

19世纪微积分处于奠基发展时期，人们不断设计出"病态函数"来指明先贤们在推理方面的漏洞。最使人惊愕的莫过于维尔斯特拉斯所提供的"连续而处处不可微的函数"的例子。诸如此例的出现迫使人们更加尊敬逻辑的力量而大大降低了对直觉的信任。以致于20世纪以来弄得直觉与猜想在数学教学中几乎毫无地位了。正是波利亚一些著作的出版，才为数学中的直觉与猜想挽回了一些声誉。

其实就以上述著名的维尔斯拉斯的例子来看，那也不是逻辑演绎的结果，而是想象的产物。须知函数 $y=f(x)$ 的连续性只是说明增量 $\Delta x$ 与 $\Delta y$ 同时趋于零，但 $\Delta y$ 对均速趋零的 $\Delta x$ 来说却是可以时进时退地趋零的，这样 $\Delta y/\Delta x$ 自然就不可能有确定的极限(即导数)了。正是这种精细的直觉能导致关于连继不可微函数存在性的猜想。又鉴于三角函数 $b_n\cos(a_nx)$ 能随着 $a_n\to\infty$ 和 $b_n\to 0$ 而出现无限次无限小振幅的振荡，所以维氏也就很自然地会想到用这种类型的三角函数级数去构造他想象中的例子。当然直觉导致谬误的例子也是不胜枚举。为使直觉能成为创造的正确向导，就必须选择产生直觉的良好背景。历史经验示明，物理科学是产生数学直觉的重要源泉。例如庞加莱就有过这方面的经验之谈。事实上，从牛顿以来 300 年间数学上一系列重要方法的提出，大多是受到物理学的启发。但必须补充指出，由于近 30 年来数学方法已经进入一切领域，不仅应用于生命科学，还应用于经济科学，心理学及其他社会科学，因此为数学方法提供直观背景的天地更加广阔了，取得有用直觉的源泉自然不必再局限于

物理科学了。

## 结构观点与抽象度分析

从数学方法论角度看，40年前盛极一时的法国布尔巴基学派的观点和他们仍在继继的事业确实是值得重视的。这一学派的基本观点认为，全部数学或大部分数学都可按照结构的不同分类。应该用公理化方法抽象出各门数学的各种结构，找出各数学分支间的结构差异，这样在重新组织成的数学体系里就可以获得诸数学分支内在联系的清晰图景。他们还认为数学的发展无非是各种结构的建成和发展而已。到1973年他们已出版36卷书，内容包括了近代数学的绝大部分分支，但至今仍未宣布写完。

凡是一个集合中的元素间引进了运算或变换，则就形成一种"结构"，显然这样一个普遍概念几乎可以囊括一切。他们把数学区分为"代数结构"、"序结构"和"拓扑结构"三大类。由这三种"母结构"及其交叉还可导出各种子结构与分支结构。例如"巴拿赫空间"（完全赋范线性空间）就是由拓扑结构与代数结构交叉而成的分支结构。于是按照结构属性分类法，就可以把许多数学分支纳入到整个数学体系的适当位置上，这样，整个数学体系就可以比喻作一座建设得井井有条的大城市，中心市区的巨大建筑物就好比是一个业已建成的数学理论系统，而多少有些杂乱无章向外扩展的郊区就好比是一些尚未发育成型的数学新分支。

由上所述，可见布尔巴基的结构主义是现代形式公理化思想方法的一大发展，因为后者只是着重探讨每门数学的公理化，而结构主义采取了全局观点，着重横向分析诸数学分支间的结构差异与内在联系，这对全面整理和发展数学是有积极作用的。结构主义思潮曾影响过数学教育领域， 在 欧 美出现过所谓"新数运动"，但后来并未取得成功。看来数学结构形式的研究，应该进

一步发展到研究数学概念的“抽象度”，才能给教师和研究工作者提供更多有用的信息。

按照反映论观点，概念抽象思维的进行是有层次性的，这在数学的理论思维中表现得更为明显。数学理论中的抽象物（概念或命题）大多是经过几步抽象形成的。例如，自然数集合 {n} 公认为三度抽象物；第一步从具体数量抽象出个别自然数 1，2，3，4，5 等概念；第二步从个别的自然数再抽象出一般的任意自然数 n 的概念；第三步根据康托的“概括原则”形成一切自然数作成无穷集合 {n} 的概念。进一步还不难证明实数集合 R 的概念是五度抽象物。

在每个数学分支理论中，作为出发点，公理与基本命题可规定抽象度为（1 或 0）。于是所有抽象物按抽象的步数由小到大排列便作成一个偏序集（poset），只有相关联的抽象物（比如{n}和 R）才在同一链上。把抽象物用点标记，则就可以用“多重有向平面图”来刻画抽象物系统。我们可以把每一抽象物所需要的最多抽象步数定义为它的“抽象度”，还可计算该相应点的平面点线图中的“入度”（in-degree）与“出度”（outdegree）。这样，每一点就有三个指标：“抽象度、入度、出度”，它们分别刻画了该点相应的数学抽象物的深刻性、重要性与基本性。此外，还可分析每一抽象物各个抽象步骤所采用的抽象法则并评定其难度，从而获得“抽象难度向量”。如果对每一分支中的重要抽象物都做上述各种分析，则将形成抽象度分析表册，它将能给研究工作者与教师们提供该分支的全面而深刻的信息。显然，若要把布尔巴基的30多卷都作出上述抽象度分析表册，那将是一件巨大的工程。但愿国内的年青同行，能以布尔巴基那样的集体协作精神，逐步去完成这项很有意义的工程！

---

本文原载《百科知识》1985 年第 1 期，收入本书时作了文字上的校订。

## ◎浅　谈◎

## 数学方法论

### §1 引　　言

我们知道，关于数学的发现、发明等方法的研究是由来已久的。17 世纪伟大的哲学家和数学家莱布尼兹就曾写过《论发明的技巧》的著作。解析几何的创始人笛卡儿也曾出版过“方法论”的专著。他曾特别强调怎样从数学解题过程中总结出一般的思想方法及法则。例如，他说过这样的话：“我所解决的每个问题，都成为以后解决其它问题的规则。”近代的著名数学家中，象庞加莱、克莱茵、希耳伯特、阿达玛等人也都分别发表过关于数学方法论的精辟见解和论著。

特别值得提到的是一位美籍匈牙利数学家波利亚，他曾花数十年时间，致力于“数学发现”与“解题思想方法”的研究。他的一些著作已经被译为中文。还有一位美国数学教授克莱因曾在 1972 年出版了一本厚达 1238 页的巨著，系统地叙述和总结了古今数学思想发展史。该书包藏着大量的题材，可作为我们研究数学方法论的极为宝贵的参考资料。

上面谈了一段情况，可是还没有明确回答这样一个问题：我们从事数学工作的人，也即以数学为职业的“数学工作者”们，其中包括大量的中学和大专学校的数学教师们以及一些专职的科研工作者，为什么应该重视数学方法论的研究呢？我想回答是简单的：有出息的数学工作者总是要在数学科学中有所作为、有所创新的。尤其是数学教师们总是希望能够多教出些有创造发明才能的学生来。因此，怎样去研究解决数学问题，怎样才能去发现数学原理和创造数学方法，这些属于“方法论”范畴的问题，自然需要引起足够的注意和认真的研究。

即使对于大专学校和中学的学生说来，他们正在学习各门数学课程，也必须注意掌握数学的思想方法，才能学得深，理解得透；遇到实际问题时，才能使数学工具发挥作用；特别有才能的学生还可能在青年时代就对数学作出贡献。在数学发展史上我们已经看到许许多多这样的先例。

## §2 归纳法与类比法

现代的中学代数里都要讲述“数学归纳法”，它是用来证明同自然数有关命题的一种方法。但这里要谈的是一般自然科学中用到的归纳法，通常称为“经验归纳法”或“实验归纳法”。

提到“实验”二字，有的人或许会奇怪：数学又不是物理学或化学，怎么也需要实验呢？不错，数学定理和公式的证明，一般需用演绎法。但是，去发现真理往往比事后论证更为重要。又因为数学的真理往往反映客观存在的数量关系和空间形式，所以有时确实需要通过实验和观察才能发现它们。

例如我国古代《周髀算经》中就有关于勾股定理的特殊形式及具体运用。还有后来贾宪、杨辉关于二项式展开系数的三角形的发现等等，这些都来源于经验归纳法，而不是靠演绎法得来的。

18 及 19 世纪有突出贡献的数学家欧拉和高斯，根据他们自身的工作经验，曾发表过一些“经验之谈”。欧拉说过：“数学这门科学，需要观察，也需要实验。”高斯也说过，他的许多定理都是靠归纳法发现的。

我们可以举出大量实例来说明经验归纳法确实是发现数学真理的一种有效手段。

**例 1** 直线分割平面问题：试问平面上 $n$ 条彼此相交而无三者共点的直线能够把平面分割成多少部分？

这是个很简单的问题，如以 $S_n$ 表示分割平面部分的数目，则由简单的实验观察可知

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | … |

由观察我们发现：$S_1=1+1$，$S_2=1+1+2$，$S_3=1+1+2+3$，$S_4=1+1+2+3+4$。依此类推，便可猜想到：

$$S_n=1+1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

然后用数学归纳法，便可立即证明上述公式是普遍成立的（请读者自己去给出数学归纳法证明）。

**例 2** 欧拉的面、顶、棱公式：试问空间中的任何一个凸多面体的面数、顶数与棱数之间有怎样的关系？

以 $F$，$V$，$E$ 分别代表一个凸多面体的面数、顶点数和棱数。猜想欧拉当年一定观察过许多具体的多面体，对 $F$，$V$，$E$ 各数作了系统归纳之后，才现他的著名公式的。现在不妨模拟一遍他多半走过的道路。试先调查一下四面体、六面体、六棱锥及六棱柱的 $F$，$V$，$E$ 各数（参看图 1）。

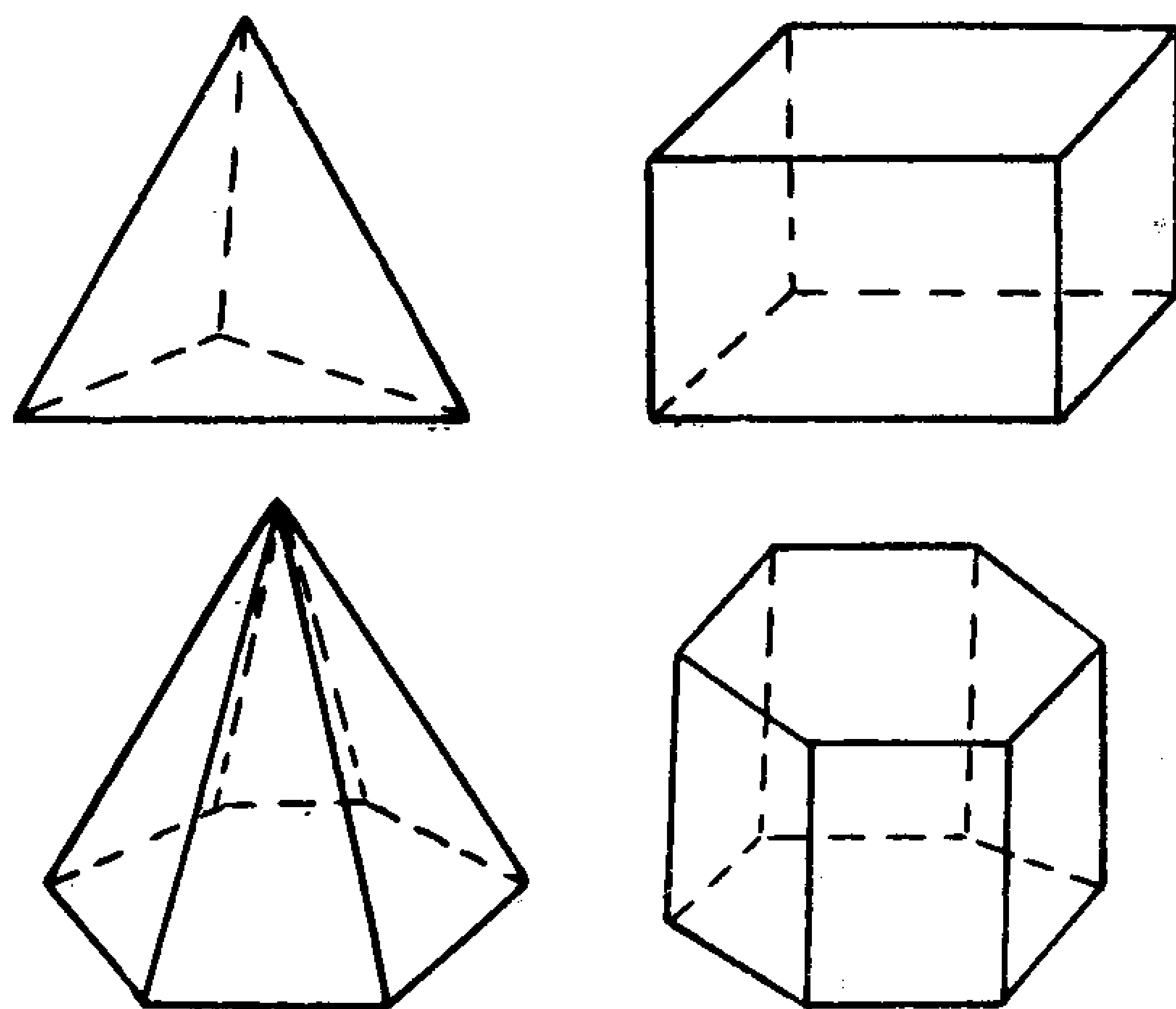


图 1

由观察可得

| $F$ | 4 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | 4 | 8 | 7 | 12 |
| $E$ | 6 | 12 | 12 | 18 |

敏感的读者或许已经能够从上示的少量数据中归纳出欧拉公式“$F+V-E=2$”来，但是数据毕竟太少了，靠少量经验得出的公式还是难以令人相信的。猜想欧拉当初一定走得更远，他会通过多面体的“生成法”去进一步考虑问题。

例如，在四面体或六面体之外加一顶，使它和靠近那一面的各顶点联起来作成新的多面体，然后再考察 $F$，$V$，$E$ 的变化规则，结果会发现（$F+V$）和 $E$ 的增加数相同，故在公式中的 $F+V-E$ 数值保持不变（参看图2）。

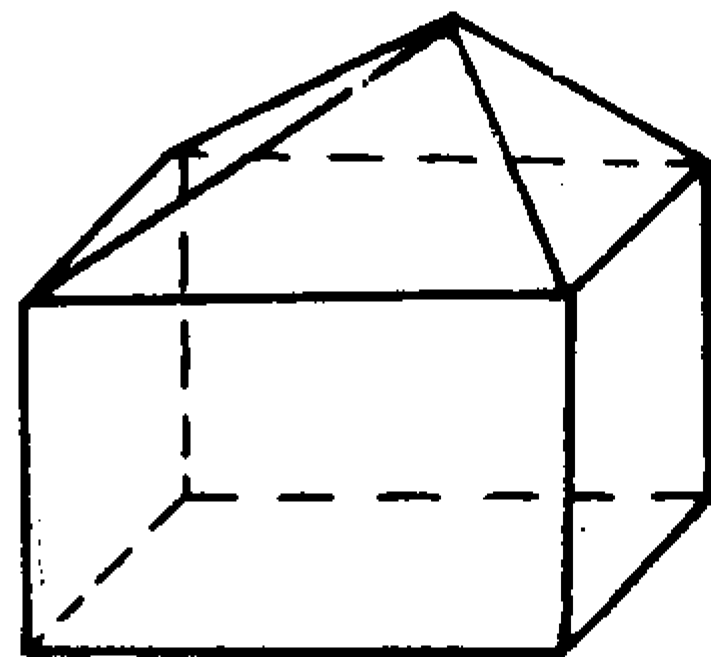


图 2

一般说来，设想多面体外增加的

一点 $A$ 和靠近它的那一面（比方说是有 $k$ 个顶点的面）的各顶点联结起来，这样就增加了 $k$ 个边，也就是 $E$ 增加了数目 $k$。另一方面，又增加了 $(k-1)$ 个面，外加顶点 $A$，这样，$(F+V)$ 的数值也增加了 $(k-1)+1=k$，因此差量 $(F+V)-E$ 总是保持不变的。可以相信，欧拉正是通过这样的"实验—归纳—推理"的途径才得出他的著名公式的。

**例 3** 高斯分圆问题：用直尺和圆规作图，能否把圆周分成 $n$ 等份？也就是能否作出圆内接正 $n$ 边形？

这是古希腊几何学上流传下来的一个尺规作图难题。18 世纪末期，这个难题被年轻的高斯解决了。高斯早年在德国哥廷根大学读书时，数学和拉丁文都学得很好。为了选择毕业后的职业出路，当时只有 19 岁的高斯正在语言学与数学专业两者之间躊躇不决的时候发现了正 17 边形尺规作图法，这使他极为兴奋，于是便立志专功数学。后来，果然成为一位大数学家。

高斯发现凡边数 $n$ 等于费马素数时，则圆周即可用尺规作出来。所谓费马素数就是形如

$$F_k=2^{2^k}+1=\text{素数}$$

的正整数。例如当 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 时，得到 $F_0=2^{2^0}+1=3$，$F_1=2^{2^1}+1=5$，$F_2=2^{2^2}+1=17$，$F^3=2^{2^3}+1=257$，$F_4=2^{2^4}+1=65537$，这些数碰巧都是素数，所以都叫做费马素数。根据高斯发现的定理，正 17 边形、正 257 边形等皆可用尺规作出。又因为每个圆弧都可用尺规进行二等分，连续平分 $t$ 次，也就能得到 $2^t$ 等份。因此高斯的分圆定理是说：如果边数 $N$ 能写成

$$N=2^t\cdot(2^{2^k}+1),\quad (2^{2^k}+1=\text{素数})$$

的形式，那么尺规作图法就能把圆周等分 $N$ 份，也就是能作出这样的 $N$ 边形来。

进一步，他还给出了更一般的定理：如果 $p_1$，$p_2$，…，$p_n$是

一批相异的素数，它们都能表成费马素数的形式，那么边数为$N=2^t\cdot p_1p_2\cdots p_n$的正多边形也可以作出来。

我们来回顾一下高斯的思想方法。他的一般分圆定理无疑是从特例分析中归纳出来的。基本关键还在于他深刻地洞察到正17边形作图的可能性。只要一旦发现了正 17 边形 作 图 可 能性之后，那么再迈前一步，去得出一般性结论就不怎么困难了。

高斯青少年时代已经熟悉复数的运算法则，也知道复数的几何表示法。因此他很自然地会想到方程

$$Z^n=1=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

的 $n$ 个根

$$Z_0=1,\ Z_k=\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right)(k=1,\ 2,\cdots,\ n-1)$$

正好是复数平面上以原点为中心，以 1 为半径的单位圆周上的个等分点所表示的复数值。

在几何作图中，我们总是用线段长度来表示数量，因此，如果能把 $z_1$ 的实和虚部两个数量 $\cos\frac{2\pi}{n}$与 $\sin\frac{2\pi}{n}$用尺规作出来，那么圆周的 $n$ 分之一也就得到了。因此为解决分圆 问 题，关键在于方程 $Z^n-1=0$ 的一个复数根能否用尺规 作 出 其数量（即作出其实部与虚部分别用线段长度表示的数量）。

方程 $Z^n-1=0$ 既是如此重要，后人也就称它 为“分 圆 方

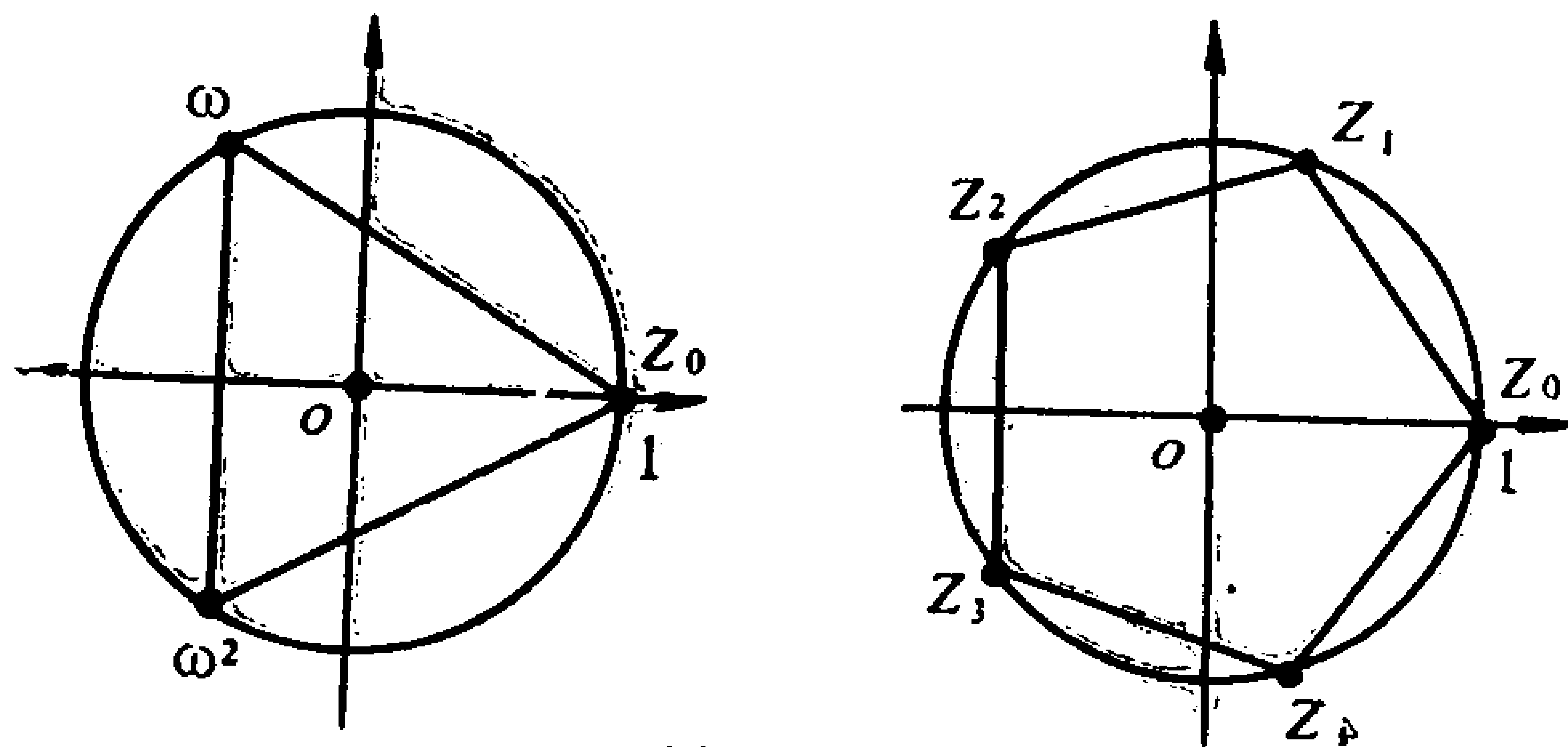



图 3

程”。根据归纳法思想，即从特殊到一般的思想法则，高斯首先细心地考察了 $n=3$ 和 $n=5$ 的情形（参看图 3）。

$Z^3-1=0$ 的情形很简单，它的三个根就是 1 的立方根，即

$$Z_0=1,\ Z_1=\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ Z_2=\omega^2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

这三个根在复数平面上的分布位置见图 3 左图。同理，右图上单位圆周的五个等分点 $Z_0$，$Z_1,\cdots$，$Z_4$ 表示分圆方程 $Z^5-1=0$ 的五个相异根，其中

$$Z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\cos72^\circ+i\sin72^\circ$$

甲代数方法容易求出 $Z_1$ 的根式表示。

分圆方程可以分解为

$(Z-1)(Z^4+Z^3+Z^2+Z+1)=0$，故 $Z_0=1$。其余四根须从方程 $Z^4+Z^3+Z^2+Z+1=0$ 解出。因 $Z\neq0$，可用 $Z^2$ 除两边，故此方程等价于

$$Z^2+Z+1+Z^{-1}+Z^{-2}=0$$

即 $$(Z^2+Z^{-2})+(Z+Z^{-1})+1=0$$

亦即 $$(Z+Z^{-1})^2+(Z+Z^{-1})-1=0$$

视 $x=Z+Z^{-1}$，解 $x^2+x=1=0$ 得

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

再从 $Z+Z^{-1}-x=0$ 即 $Z^2-xZ+1=0$ 解出，得

$$Z=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right\}\pm i\sqrt{4-\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2}\Bigg\}$$

于是，在根式中取＋号或－号共可得四个复数根 $Z_1$，$Z_2$，$Z_3$，$Z_4$。

我们知道，在平面上取定一线段作为单位长度后，它的 $\frac{n}{m}$ 便可用尺规作出来。如果把长为 $\frac{n}{m}$ 的线段和单位长线段加起来（连接起来），用作直径画圆，并在连接点处作垂直于该直径的弦，那么由圆的“相交弦定理”便立即知道弦的一半等于 $\sqrt{\frac{n}{m}}$。由此可见，凡是由有理数通过＋、－、＋、÷、$\sqrt{\ }$ 等五则运算有限多次得出来的数量（用线段长度表示的量），均可由尺规作图法作出来。根据这个准则，我们便立即理解为什么圆周的 3 等分、5 等分的点（即 $Z_0=1$，$\omega$，$\omega^2$ 及 $Z_1$，$Z_2$，$Z_3$，$Z_4$ 等复数值）均能由尺规作出。

正是从 $n=2^{2^0}+1=3$，$n=2^{2^1}+1=5$ 出发，使高斯通过类比与归纳方法猜到了次数为 $n=2^{2^2}+1=17$ 的 $n$ 次分圆方程应该也能用根式运算解出。他曾精细地考察了方程

$$Z^{16}+Z^{15}+Z^{14}\cdots+Z^3+Z^2+Z+1=0$$

也即方程 $(Z^8+Z^{-8})+(Z^7+Z^{-7})+\cdots+(Z+Z^{-1})+1=0$ 的代数解法。把 $(Z^k+Z^{-k})(k=1,2,\cdots,8)$ 进行适当分组，并通过一些代换，他终于利用四重平方根式 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ }}}}$ 把 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{15}$（$Z_0=1$）具体地表达出来了。这样一来，按照上述尺规作图的准则，便证明了正 17 边形作图的可能性（欲知其详，请参考附录三）。

近代还有个德国人不厌其烦地把分圆方程 $Z^{257}=1$ 用根式仔细地解了出来，从而还用巨幅纸张具体地作出了一个正 257 边

形。这从理论上看当然没有什么意义了。

如上所述，高斯青年时代的第一个功绩就在于从理论上解决了历史上遗留下来的“等分圆周问题”。他当时之所以能解决这一问题，就是因为他善于从简单特殊的具体例子中，利用归纳法预见到进一步的带有一般性质的结论。但是如果他缺乏必要的数论知识、解析几何知识和精练的代数计算技巧，那么他也是不会顺利地用根式解出方程 $Z^{17}=1$ 的！

下面我们再来谈一点联想式的类比推理法。我们知道，在近代科技发明中，类比推理原则用得非常成功。例如“近代仿生学”就是建立在类比推理的原则上。仿生学是用“生物机制”作类比。例如，见到燕子的飞翔，就使人们想到设计滑翔机和飞机；看到鱼的浮沉想到设计潜水艇；看到蝼蛄的钻洞想到制造挖土机；观察到蚕的吐丝就使人发明了人造丝工程。当然这些都是工程科学上的大发明。

至于在数学中，根据类比联想的方式去解决问题和发现真理，更是到处遇见，不足为奇的事情。一般说来，这种思想方法往往包括“类比—联想—预见”三个步骤。这里举一简单例子。

**例4** 一个重要不等式：下面我们写出的任意数量 $x$，$y$，$z$，等假定均不为负。首先，从简单的不等式开始：

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geqslant 0$$

立即可得 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant xy$，由此产生类比联想：考虑是否会有 $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\geqslant xyz$（?）因而需要考查是否会有

$$x^3+y_3+z^3-3xyz\geqslant 0\ (?)$$

鉴于上式左端是个“循环对称式”，我们尝试作一下分解，果然成功：

$$x_3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$
$$\frac{1}{2}(x+y+z)\ [(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0$$

这就验明了联想到的事实：

$$\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\geqslant xyz.$$

由此再进一步通过类比及推广，我们便想到一般不等式：

$$\frac{1}{n}(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n)\geqslant x_1x_2\cdots x_n,$$

其中各 $x_i$ ($i=1,\cdots,n$) 皆为正数，记 $A_1=x_1^n$, $A_2=x_2^n,\cdots$, $A_n=x_n^n$，则得

$$\frac{1}{n}(A_1+A_2+\cdots+A_n)\geqslant(A_1A_2\cdots A_n)^{1/n}$$

这就是算术平均值不小于几何平均值的基本不等式。

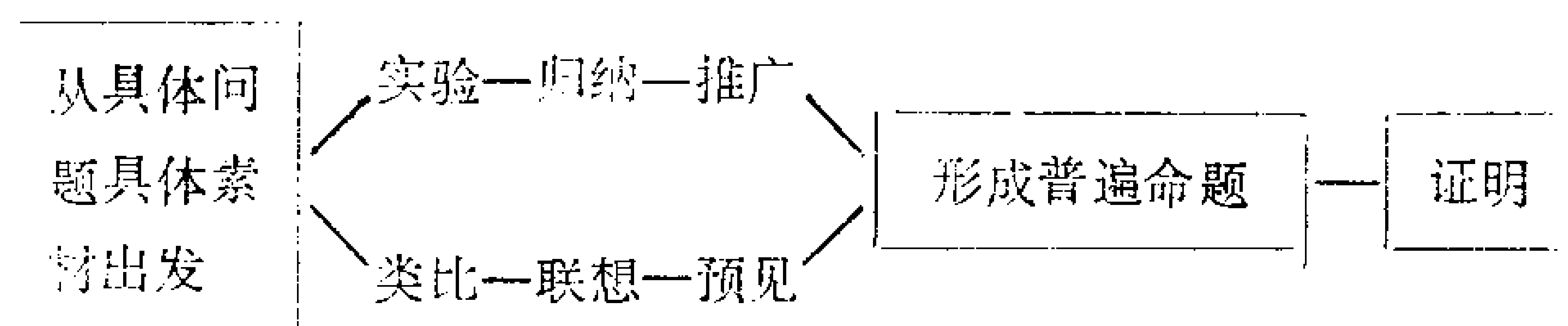
这个重要不等式并不明显，但它却可以从一个极简单、极平凡、极容易的例子出发，通过类比、联想、推广（预见）等步骤逐步发现出来。

一般说来，类比、联想和归纳等方法往往是交互为用的。其基本规律就是"从特殊到一般，从个别到整体"。例如，就欧拉的"面、顶、棱公式"来说，我们所举出的例子都是特殊的、个别的，但一旦发现了普公遍式，那就概括了一切可能情形，从而具有整体性和一般性。

从特殊到一般，必然带有从具体到抽象的特点。例如从具体的 $n=1$, $n=2$, $n=3$ 等过渡到一般的任意的自然数，就达到了抽象的理性认识的阶段，这是思想过程中的"飞跃"。我们使用"经验归纳法"或是"类比联想法"，最后都需要这种"飞跃"，否则便不可能获得数学真理，即一般性定理或公式。

如上所述，我们所介绍的归纳法与类比法主要是一项发现数学真理（定理及公式）的有效手段。一般说来，如果猜到了或发现了一个涉及自然数 $n$ 的命题之后，那么还必须利用数学归纳法或别种论证法去证明它。所以现代的数学工作者，在从事创造

性的科研活动中，惯常是采取如下的途径和步骤：




我们所举的例1、例2、例3、例4都可利用数学归纳法给出严格证明。当然例1特别简单，例2略较麻烦（可以对顶点个数 $n$ 施用数学归纳法），例3最为困难（还需要借助于数论知识）。至于例4则可借助于下列不等式

$$(n+1)A^n(A-1)\geqslant A^{n+1}-1,\ (A>0)$$

给出数学归纳法证明。这是一个有趣味的习题，建议感兴趣的读者自己去找出它的证明。

最后，我们再举一个在数学史上很有启发性的例子。这个例子在波利亚所著《数学中的归纳法与类比法》一书中曾作过详细的介绍。

**例5** 一个级数求和问题：数学家伯努利曾经求得不少无穷级数的和。但他对自然数倒数平方的级数和

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$$

却无法求出来。当时他曾公开征求过这一求和问题的解答。可是直到十八世纪上半期，才由欧拉解答出来。欧拉通过一种巧妙的类比推理方法发现

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

欧拉发现这个结果后，当时未能给出严格证明，不免有些怀疑。于是他对上述等式两边还做了数值计算，算到七位数字都一致，即得出等式两边的数值都等于 1.644934…。这才使得欧拉确信他所发现的级数和 $\pi^2/6$ 是正确无误的。当然，现今的微积

分学中已有各种方法可以证明上述结果。

我们来看看欧拉当初是怎样发现上述结果的。首先，欧拉熟知多项式因式分解定理：假设 $\alpha_1$，$\alpha$，…，$\alpha_n$ 是 $n$ 次代数方程

$$a_0+a_1k+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0\ (a_0\neq 0)$$

的 $n$ 个不等于零的根，则多项式可析成因式乘积

$$\sum_{k=0}^{n} a_kx^k=a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right).$$

类似地，对于只含偶次项的 $2n$ 次方程

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^nb^nx^{2n}=0,\quad (b_0\neq 0)$$

假设有 $2n$ 个互不相同的根

$$\beta_1,\ -\beta_1,\ \beta_2,\ -\beta_2,\cdots,\ \beta_n,\ -\beta_n,$$

则得 $b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^nb^nx^{2n}$

$$=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right).$$

由此把乘积展开出来，便知 $x^2$ 项的系数为

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right).$$

欧拉考虑三角方程 $\sin x=0$，也就是方程

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots=0.$$

他把上式看成是“无限次方程”，显然它有无穷多个相异根，即

$$0,\ \pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\cdots$$

从方程左端约去因子 $x$，即去掉 0 根。此时方程可改写为如下形式

$$\frac{\sin x}{x}\equiv 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^2}{7!}+\cdots=0.$$

这个方程有相异根

$\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, …

欧拉于是采取了一个大胆步骤，即仿照上述 $2n$ 次多项式分解成因式乘积的形式，把这里出现的所谓“无限次多项式”分解成因式乘积形式：

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

这样一来，再把右边的乘积展开出来，便可发现 $x^2$ 项的系数是

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots,$$

也就是

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

这样，欧拉便完成了一项非常有趣的发现。

我们看到，上述的类比推理中，包含着从“有限”过渡到“无限”的过程。因为“无限”与“有限”具有本质的差别，所以一般说来，简单的类比往往会导致谬误。（这方面的例子举不胜举）。但是上述欧拉的类比法却得出了正确结果。究其原因，是因为他所碰到的“无限过程”（级数与无穷乘积）正好都是“绝对收敛”的。这在近代数学分析中可以得到严格的证明。这里不细说了。

## §3 抽象分析法和倒推分析法

什么叫“抽象分析法”？我们最好从一个人人喜欢引用的例子来说明问题。这就是十八世纪出现在东普鲁士哥尼斯堡

(Koenigsberg) 的所谓"七桥问题"，也就是我们下面例 1 要谈论的问题。

**例 1** 七桥问题：哥尼斯堡地方有一条布勒尔河。这条河两个支流，在城中心汇合成大河。中间是岛区。河上有七座桥如图 4 所示。

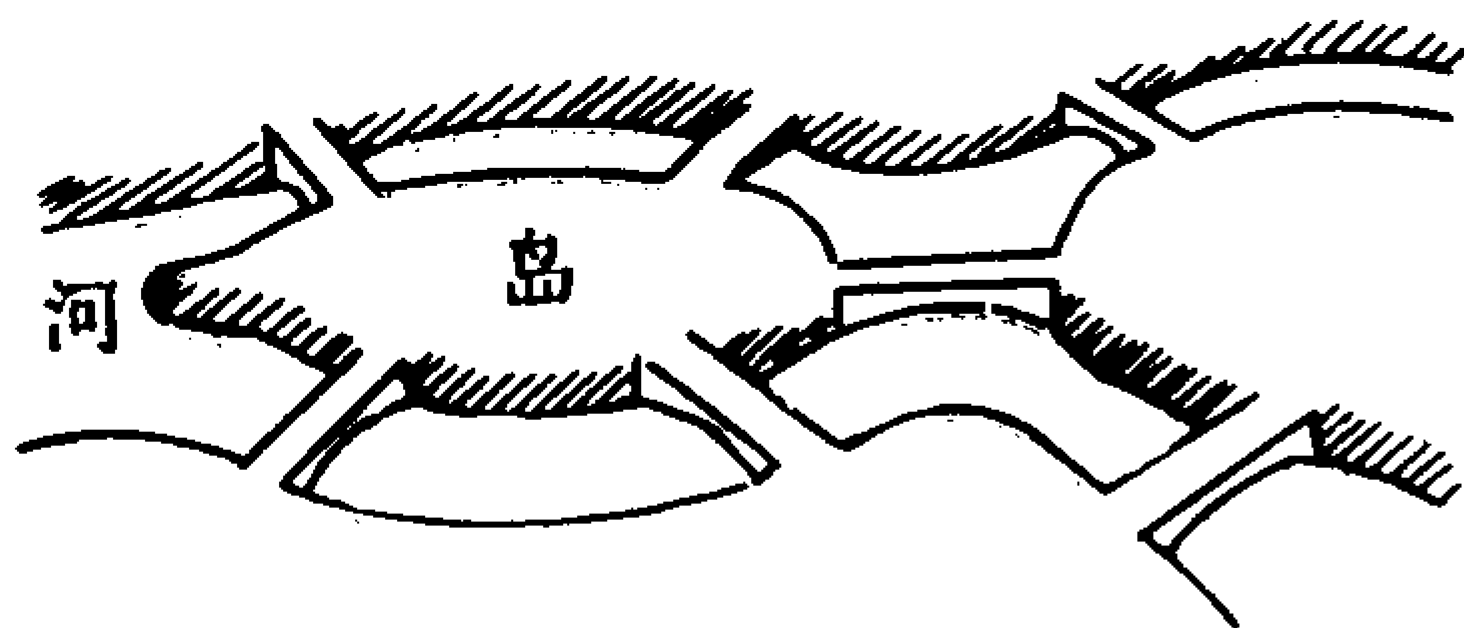



图 4

哥尼斯堡的大学生傍晚散步时，总想一次走过七座桥，而每座桥只准走一遍。可是试来试去总是办不到。于是便写信给著名的数学家欧拉。欧拉想了几天，彻底解决了这个问题，回了信，使大学生们大为满意。这是 1735 年发生的故事。现在我们来看看欧拉当年是怎样解决这个问题的。

首先欧拉看透了这个问题，他想，既然岛与半岛无非是桥梁的连接地点，两岸陆地也是桥梁通往的地点，那末就不妨把这四处地点缩小成四个点，并把七座桥表示成七条线，这样当然并不改变问题的实质。于是，人们步行走过这些地点和七座桥时，就相当于用笔画出如下的图形（见图 5）。图中的四个交点代表四个地点，七条线代表七座桥。

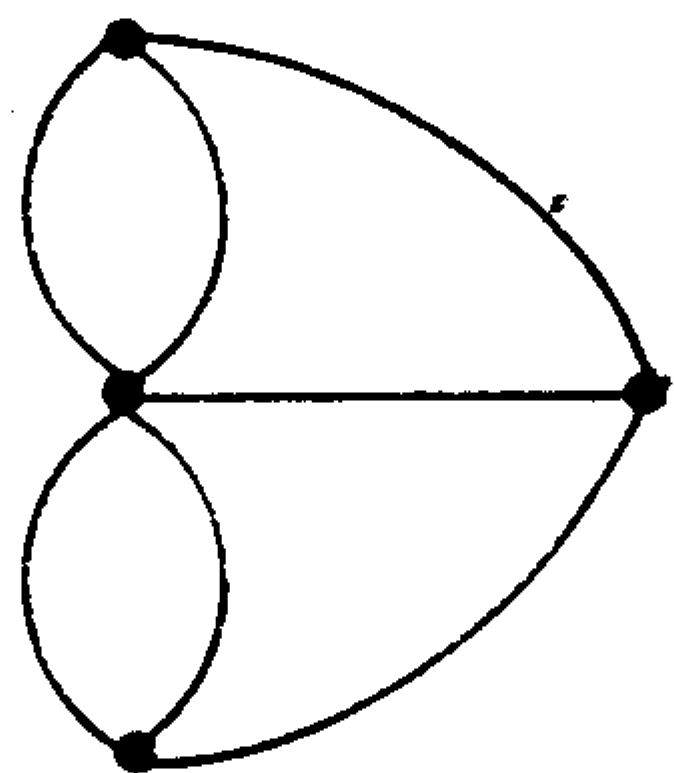


图 5

因此，一次无重复地走过七座桥的问题，就转化为一笔画出上述图形的问题。

欧拉对原来的七桥问题，经过分析，抓住实质，把它抽象化为"一笔画问题"。这方法就叫做"抽象分析法"

（这里欧拉把岛和陆地抽象成为点，把桥抽象成为线，这样才简化成为一个“一笔画问题”）。

接着，欧拉又考虑了“一笔画”的结构特征。一笔画有一个起点和终点，起点和终点重合者称为封闭图形，否则便称为开放图形。

除起点与终点外，一笔画中间可能出现一些曲线的交点。在这些交点处曲线一进一出，因此通过的曲线总是偶数条，这些交点就称为“偶点”。由此看来，只有起点和终点处通过的曲线可能是奇数条。此时起点与终点可称为“奇点”。特别当起点与终点重合时，则便成为一个偶点，或者成为一个一般点，当然不能再是奇点。

正是经过上述分析，使欧拉看出：任何一个一笔画，要么没有“奇点”，要么有两个“奇点”。现在，七桥问题所对应的图形中，四个点都是奇点，因此它超出一笔画的范围，不能由一笔画成。

这样，欧拉不但彻底解决了七桥问题，而且还发现了如上所述的有趣定理。我们知道，欧拉的这项研究，被公认为是近代“线路拓扑学”的先驱工作，所以决不可简单地把它看作是一个无意义的数学游戏问题。

下面我们再举一个与“图论”有关的有趣例子。

**例 2**　六人集会问题：试证明任何六个人的集会中，总是有三个人彼此相识，或者彼此不相识。

这是《美国数学月刊》（Amer. Math. Monthly）1958年6月号上刊载的一个较古老的数学游戏问题。关于它的推广曾引出近代“组合数学”中一条极为深刻而有用的定理，所谓拉姆塞定理。（注意：如果例 2 中的人数改为五人，则所述结论即未必成立，请聪明的读者自找一例）

我们可以把编号为 1，2，3，4，5，6 的六个人用平面上六个点来表示。每两个相识者之间用“实线”联结，不相识者之间

用“虚线”联结。为了使联线不发生重叠，可设平面上六点（也以 1，2，3，4，5，6 标记）中没有三点共一直线。这样，把每两点都用直线（实线或虚线）联结起来后，就一共有 $C_6^2=\frac{6\times5}{1\times2}=15$ 条直线。于是原来的问题便转化为一个“图论问题”：要证明在上述的 15 条直线中（不管实线与虚线各有多少条），一定有某三条实线或者某三条虚线联成一个三角形。换句话说，须求证总存在一个实线作成的三角形或者虚线作成的三角形（简称“实△形”或“虚△形”）。

显然，把原来问题转化为图论问题的这一步骤，就已经用到了抽象分析思维。现在再来分析图线结构的各种可能性（参看图 6）。

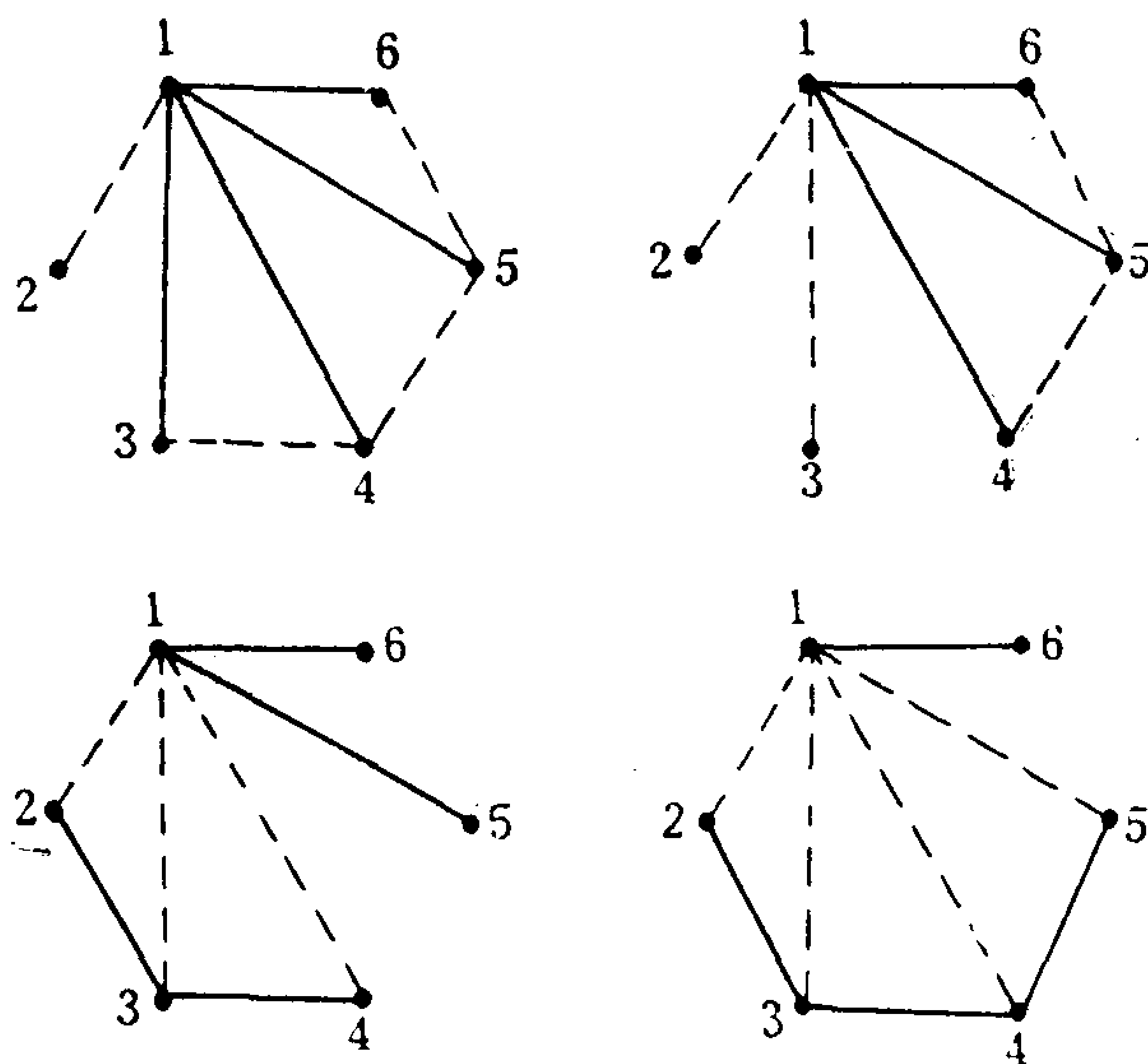



图 6

如图 6 所示，点和其它五个点的联线可以是“一条虚线四条实线”；“两条虚线三条实线”；“三条虚线||条实线”；“四

条虚线一条实线”。但对于“二虚三实”与“三虚二实”以及“一虚四实”与“四虚一实”的分析方式是一模一样的，所以只须分前两种情形就够了。(至于五条全是实线或者全是虚线的情形，读者不难自行立即验证)

于“一虚四实”的情形中，在 3，4；4，5；5，6 间不妨都画虚线，否则实△形便立即出现。但都画上虚线后，4，6 间不论画什么线都必然会出现一个实△形或虚△形，所以这时结论的成立是显然的。

同理，于“二虚三实”的情形中，如图6中2图所示，4，6 两点间不论用哪种线联结，都会产生一个实△形或虚△形。

因此我们便证明了一条简单的“图论定理”：用实线或虚线联结六点中的各两点之后，则至少必有一个实线作成的三角形或一个虚线作成的三角形。只须对这条定理中的点、线、三角形加上一番人为的解释，也就证明了例 2 中的断语。

从上面所举的两个例子，我们看到：所谓分析法，就是通过分析，抓住问题实质，把问题转换形式（即等价变形），以便达到化难为易，化繁为简的目的。遇到较复杂的情况，还需要把已经转换后的问题，进行分解（即分解成各个组成部分或者分解为若干可能情形），然后各个击破，以使问题获得全部解决。

还有一种常用的分析法，叫做“倒推分析法”。有时我们碰到一个问题，不知从何下手。那末就看一看，它所要求得到的“结论”是什么？问题就变为如何达到这个“结论”。但困难往往是不知道从哪里起步走。

这时最好的办法，就是从“结论”（目的地）出发，也即把“结论”当作已知“条件”，一步步往回探索。这样就会摸清楚通向“结论”的道路，自然也就会找到这条路子起步的地方。然后再一步步返回结论。这种方法就称为“倒推分析法”。事实上，数学上的许多定理和公式，都是可以采用倒推分析法去重新发现它们的证明方法或推导过程的。

下面我们借用波利亚《数学发现》（英文版）一书里的一个简单的典型例子来说明这种分析方法。

例 3　一个尺规作图题：试问如何在一个三角形 $ABC$ 的 $AC$ 和 $BC$ 两边上分别取一点 $X$ 和 $Y$ 使得 $AX=BY=XY$？

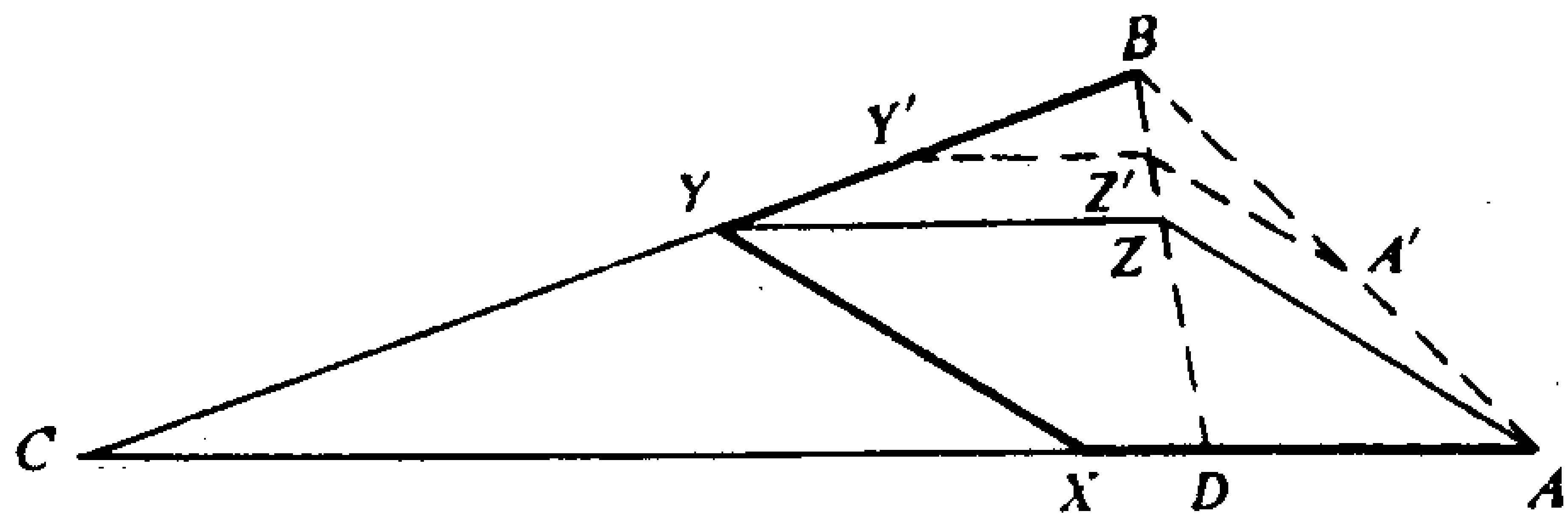



图　7

我们一开始不知道如何确定 $X$ 和 $Y$ 的位置，就只好采用倒推分析法。如图 7 所示，假定 $X$ 和 $Y$ 已经找到了，于是可以一步步往回探索。既然 $XY$ 和 $AX$ 是等长线段，它们就可以作为平行四边形的相邻二边。这样，可作平行于 $XA$的线段 $YZ=XA$ 于是只要 $Z$ 点能作出，则 $Y$ 和 $X$ 的位置即可随手定出。往下须考虑如何确定 $Z$。因为 $YZ=YB$，所以$\triangle YBZ$是个等腰三角形，故由相似形性质立知 $Z$ 必定位于等腰三角形 $CBD$ 的底边 $BD$ 上，当然 $D$ 是立即可以作出的。问题又变为如何在 $BD$ 上求得 $Z$。

不妨再在 $YB$ 上任取一点 $Y'$ 、并作平行于 $YZ$ 的线段 $Y'Z'$。鉴于 $ZA=YZ$，我们联想到也可以作 $Z'A'$ 使得$Z'A'=Y'Z'$。这样一来，再利用相似形性质，只须注意到 $AZ//A'Z'$。便终于探明确定 $Z$ 点的路子了。

第一步，在 $CA$ 上作出一点 $D$ 使得 $CD=CB$，从而联结 $B$，$D$ 得 $BD$。第二步，在 $CB$ 上任取 $Y'$，作 $Y'Z'//CA$，并作 $Z'A'=Y'Z'$。第三步，自 $A$ 作 $AZ//A'Z'$。于是定出 $Z$。第四步，自 $Z$ 作 $ZY//AC$。，从而定出$Y$。再作$YX//ZA$ 从而又定出 $X$。因此 $X$ 和 $Y$ 终于都找到了。

一般说来，凡是三角恒等式或代数恒等式都可以采用倒推分析法加以验证。这方面的例子举不胜举，此处一概从略了。

## §4 尝试法或试探法

在几何证题中，常常需要作些“补助线”。如果补助线作对了，问题即可迎刃而解。但正确有用的补助线有时并不是立刻就能找到的。这样，就需要左试右试，从失败与成功中去发现正确的补助线。这就叫试“尝试法”或“试探法”。例如，在§3的例3里，我们作 $YZ$ 与 $ZA$ 使构成一个平行四边形，这一重要步骤就带有“尝试法”的性质（这一尝试步骤果然使我们探明了确定 $Y$，$X$ 两点的具体路子）。

从16世纪的数学史看来，人们曾花费过大量时间去探索了三次代数方程的根式解法。当时人们曾尝试求解带有数字系数的各种类型的三次方程，结果终于找到了三次方程的普遍解法。这就是古典代数教本上经常介绍的“卡当一塔塔里亚公式”和“韦达方法”等。下面我们专来介绍韦达是怎样通过“试探法”来导出三次方程的求解公式的。

首先，韦达熟知二次方程 $x^2+bx=c$ 解法过程中的配方法。配方法的目的在于通过变换吸收掉一次项 $bx$。为此，令 $y=x+\frac{b}{2}$，则得

$$y^2=x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

由此， $y=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$， $x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$.

同理，对于一般三次方程

$x^3+bx^2+cx=d$，

韦达由类比法想到可令 $y=x+\dfrac{b}{3}$ 去吸收掉二次项 $bx^2$。确实，令 $x=y-\dfrac{b}{3}$ 代入后，则原方程可约化为较简单的形式

$$y^3+py+q=0$$

其中常数 $p$，$q$ 可由 $b$，$c$，$d$ 等具体表示出来。

到此，才碰到了真正的困难：如何求解上列约化后的三次方程？正是这个方程困扰了 16 世纪的不少人，因为它无法被配成平方形式。

于是韦达的办法就是采用试探法，姑且命

$$y=z-k, \qquad \text{即} \quad z=y+k.$$

试以此代入上述约化方程，看看能进一步简化成什么样子。其中 $k$ 是个待定数，暂且不管它取什么值，这样，由直接演算可得

$$(z^3-3kz^2+3k^2z-k^3)+pz-pk+q=0.$$

注意到比例 $3kz^2:pz=3k^2z:pk=3kz:p$，所以不妨将上式另写成如下形式：

$$z^3-(3kz-p)z+(3kz-p)k+(q-k^3)=0$$

这样一来，便使韦达发现：为进一步简化方程形式，应该对 $k$ 作这样的选择，使得

$$3kz-p=0, \qquad \text{亦即令} \quad k=\frac{p}{3z}.$$

由此原约化方程便进一步简化为

$$Z^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3Z^{-3}+q=0$$

这就好办了。只须令 $X=Z^3$，再用 $X$ 乘方程的两边，那就立即得到一个二次方程

$$X^2+qX-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

由此立刻解出

$$X=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}},$$

从而由 $Z=\sqrt[3]{X}$ 立得

$$Z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}}.$$

我们知道开立方有三个相异根，特别 $\sqrt[3]{1}$ 的三个立方根是1，

$\omega=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$，$\omega^2=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$。因此如上得出的 $Z$ 有六个值（它们可以从已经算出的一个 $Z$，分别再乘以 1，$\omega$，$\omega^2$ 而得到）。

可以验明这六个值代入

$$y=z-k=z-\left(\frac{p}{3}\right)z^{-1}$$

后实际只得到的三个相异值。因此按上述公式便求得了原约化方程的全部根。

从上述韦达使用的方法看来，在试探性的代换步骤中引进待定常数 $k$ 这件事很重要，因为它能帮助人们最后适当选择 $k$ 以达到进一步简化方程的目的。韦达处理四次方程的求解问题时，仍然采用这种方法。

事实上，在近代一些数学问题的分析研究中，引进“待定常数”或参数，是一项常用的有效手段。因为引进的待定常数起着“参变数”的作用，它使得问题的表现形式及解的结构都处于可变（即可调整）的状态中，因此，最后按要求适当选取参数值，便往往能达到简化问题和简化求解过程的目的。

## §5 一般解题方法

30 多年前，美国斯坦福大学名誉教授波利亚曾出版过《怎

样解题》一书。该书问世后曾受到国内外数学教师们的普遍欢迎，并曾一度译成中文出版过。

《怎样解题》这本书的特点是题材浅显，说理清楚，而且内容很富于启发性。

按照波利亚的观点（其实那也是一般数学工作者常有的共同经验），解决数学问题时，大致需要采用这样几个步骤：第一步，将给定的问题正确分类。也就是要判定问题的类型。事实上，正确区分和判定问题的类型，也就暗示了解（答案）和解法的类型。一般说来，数学问题可区分为两大类：一类是寻找未知者，属于“求解”问题；一类是要求判定某个结论，属于“证明”问题。求解问题中还可以细分为几小类。例如有的是寻求一个“答案”（或是数量，或是图形。或是某个结论，…）；有的是寻求一个方法（比如要找一个合乎一定条件的计算程序或作图方法等等）。“证明”问题中也可细分为几种，一种是要求证明某些数量间的关系（如等式关系、不等式关系等等）；还有一种是要证明某些性质或某种属性（如求证 $\sqrt{2}$ 与 $\pi$ 为无理数，求证三分角问题尺规作图的不可能性等等）。

第二步，对问题正确理解。这需要抓住问题的主要组成部分。一般说来，很多问题往往包括三个主要部分：一是“未知元”，二是“条件”，三是“已知数据”。举例来说，如果要解一个二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 则 $a,b,c$ 三者便是给定的数据，$x$ 是未知元，而等式关系本身就是问题中的条件。有的问题里也可以不出现数据部分。例如，要求找出圆内接正方形面积和圆面积之比，则比值就是“未知元”，正方形内接于圆便是个“条件”，但并无“数据”存在。

正确理解问题很重要，把问题理解透彻了，也就把问题的实质看透了，这样实际上也就把问题解决了一大半。例如欧拉解决“七桥问题”时，就是因为他把问题看透了，所以也就迎刃而解了。

理解问题就是要正确地抓住问题的各个主要部分。要正确地理解"条件"和"数据"的作用，并进而看出条件、数据和未知元之间的关系，这样也就在正确理解问题的基础上，能预见到解决问题的正确途径或可能道路。

第三步，设想并实现解题方案及步骤。在正确理解问题的基础上，就能较顺利地提出（设计）并实现解题的方案与步骤了。这时候，我们在前面（§2，§3，§4）几节中介绍过的所谓"归纳法"、"类比法"、"分析法"、"试探法"等就有机会用上了。但应该针对不同的具体问题，采用不同的具体方法去处理和解决。如果不考虑具体情况，只管把一些方法照搬硬套，那当然是不能解决问题的。

一般说来，设想或提出解题方案前，常常要先对问题进行尽可能的简化、转化和分解，以便达到化难为易、化繁为简的目的。在设计解题方案时，往往需要采取类比、联想以至创造性的想象等思想方法。有时甚至还需要回忆成功和失败的经验，以资借鉴。

在实施解题方案时，有时还不免要修正可能出现的错误，这时候"尝试成功法"或"试探法"往往会帮助人们去达到目标。

第四步，检验所得结果。这一步就是要把问题解决的最终结果重新验证一遍，看看是否完全合乎问题的要求。

以上所谈的，只是一些原则性的解题步骤。这些步骤无论是处理一个大型的数学问题或较小难度的数学习题，其实都是实用的。不过碰到具体问题时，还需要根据问题的性质和难易程度，相机行事，不能步步照搬。比如，遇到类型十分明显的问题，以及得出的问题结论已无可置疑了，那就不必再要有第一第四两个步骤了。

## 附录一：实验归纳法失败之例

归纳法与类比法固然是发现数学真理的手段，但毕竟不是确

立和证明数学命题的方法。对于数学工作者来说，既要正确地大胆地使用实验归纳法去发现新事实、新定理，但又必须十分小心，不要只满足于“小规模”的实验观察，就把归纳得到的“结论”轻易地信以为真！

历史上用归纳法获得成功的著名例子，固然举不胜举，而失败的例子却也是为数不少。最有趣的是“费马素数猜想”的错误。费马是对古典整数论作出重要贡献的杰出的“业余数学家”。可以说，他也是一位熟练地使用归纳法的能手。§2 中提到的费马数 $F_n=2^{2^n}+1$ 就是他最先研究的。通过观察，他发现

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 3 | 5 | 17 | 257 | 65537 |

$F_n$ 于 $n=0$，1，2，3，4 时都是素数。于是他便大胆猜想“所有 $F_n$ 都是素数”。可是事隔半个世纪之后，善于计算的欧拉成功地把 $F_5$ 分解为两个因数之积：$F_5=4294967297=641\times6700417$.因此 $F_5$ 就不是一个素数。这就推翻了费马的猜想。由此看来，建立在小规模实验观察基础上的归纳结论，是不可以轻信的。除非加上旁证或进一步推理，才可以作为“科学预见”接受下来。但即使这样，也还必须给出严格的数学证明之后才能确立为定理。

在近代数学文献中，特别是在大量出版的现代数学期刊中，错误的定理和公式也是屡见不鲜的。有的定理的“证明”是错的；有时定理本身结论就不对。这些都是不足为怪的现象。因为任何一门科学，都是通过“实践一认识一再实践一再认识”的规律来发展的，而认识过程中就不可避免出错误，数学科学当然也不能例外。

数学史上把高斯赞誉为天才，但即使是这样一个数学天才，也出现过错误。他曾对“素数分布函数”$\pi(x)$ 与“对数积分函

数” $\mathrm{li}(x)$ 之差的符号问题想错了。他认为两者之差总是定号，即总是 $\pi(x)<\mathrm{li}(x)$。可是，又是时隔半个多世纪之后，英国数学家列特伍德于 1914 年竟证明当 $x$ 非常大之后，上述两函数之差可以无限次改变符号，从而否定了高斯猜想。〔1〕

由上可见，搞数学工作的人，既要重视归纳法的应用，又不可以轻信由归纳得出的结论，更不可以盲目迷信任何“数学天才”的什么猜想或预言。

## 附录二：几何三大难题为何不可解

我们在讨论高斯“分圆问题”时，已经谈到尺规作图的一条准则：凡是由有理数经过有限多次 $+$、$-$、$\times$、$\div$、$\sqrt{\ }$ 等五则运算得出的数量（以线段长度来表示这种数量），都可以用尺规作图法作出来。反过来，还可以进一步证明：用尺规能作出的数量，也仅限于上面所说的数量。

事实上，如大家所知，一旦取定一个单位长度作为后，数轴上那些代表有理数的坐标点，便可由尺规作出。如果考虑坐标平面（笛卡儿直角坐标系），那末一切以有理数为纵横坐标的位置点便都可由尺规作出。这些点可称为“有理点”。用直尺作图可以联结任意两个“有理点”，当然也可以借助于圆规作出各个有理数的平方根，以及平方根的平方根等等数量。于是，在这样的坐标平面上，我们使用直尺作出的直线，使用圆规作出的圆周，它们的方程式无非是如下的形式：

（1）　$ax+by+c=0$,

（2）　$(x-d)^2+(y-e)^2=r^2$,

其中 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $r$ 等也都是由一些有理数经过有限次 $+$、$-$、$\times$、$\div$、$\sqrt{\ }$ 等五则运算得出的数值。

众所周知，所谓“尺规作图法”，无非是利用“直线与直线

相交”、“直线与圆周相交”、“圆与圆相交”截取交点（确定点的位置）的基本方式来进行的。自然，这些交点坐标相应地是由“两个一次联立方程”、“一次与二次联立方程”、“两个二次联立方程”的代数解法来确定的。因此，所能得出的数量仍然没有超出我们在第一段里所界定的数量范围。

综上所述，我们便可断言：尺规作图法所能作出的数量也就是限于第一段“准则”中所说的数量，超出这个范围的数量，当然尺规作图法就无能为力了。

现在我们就可以来分析一下，几何三大作图难题为什么不能有解的根本原因了。

大家知道，几何三大难题就是“圆化方问题”、“倍立方问题”和“三分角问题”。详细说来，这些问题就是如下的三个尺规作图题：

（1）要求作一正方形，使其面积等于单位圆的面积 $\pi$。也即要求作出长为$\sqrt{\pi}$的线段。

（2）要求作出一个立方体，使其体积等于原单位立方体体积的二倍。也就是要求作出长度为$\sqrt[3]{2}$的线段来。

（3）要求把任意角进行三等分。

因为德国数学家林德曼早在 1882 年就证明了 $\pi$ 和$\sqrt{\pi}$都是超越数，它们是不能用有理数运算及有限次根式运算表示出来的；而$\sqrt[3]{2}$也超出了有理数＋、－、×、÷、$\sqrt{\ }$ 的运算范围，所以，无论是$\sqrt{\pi}$或是$\sqrt[3]{2}$都超出了尺规作图准则中所说的数量范围。因此，问题（1）和（2）从根本上说来，都是尺规作图法不可能解的问题。

现在我们再来看一看，为什么任意角的三等分也不可能。试回忆高斯的分圆定理：如果边数 $N$ 可以写成如下形式〔注2〕

$$N=2^{t}\cdot p_{1}\cdot p_{2}\cdots p_{n},$$

其中 $p_1$，$p_2$，$\cdots p_n$ 都是各不相同的形如 $2^{2^k}+1$的素数，则“正

$N$ 边形”就可以用尺规作图，也即可用尺规等分圆周 $N$ 份。显然上述定理只是给出了保证作图可能性的充分条件。

从数学史上我们知道，19 世纪的数学家温泽尔早在 1837年就证明了上述定理中的条件的必要性：只有当$N$可以表成如上所述的形式时，才可能用尺规等分圆周为 $N$ 份。

根据高斯——温泽尔定理，可见要把圆周等分为 9 份、18份就不可能了。因为 $9=3^2$，$18=2\times3^2$，这些数显然都不属于上述 $N$ 的类型。由此可知，40° 角与 20° 角都不能用尺规作出来。换句话说，120° 角与 60° 角要进行三等分就已经不可能，更不用说任意角的三等分能用尺规作图了。

事实上 60° 角不能用尺规三等分，也可通过三次方程的根不能用平方根表示的道理来直接说明。于熟知的三角恒等式

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

中置 $x=20°$ 则 $\cos 3x=\cos 60°=\frac{1}{2}$。因此上述等式变为

$$y=\cos 20°$$

的三次方程

$$4y^3-3y-\frac{1}{2}=0$$

利用三次代数方程的求根知识，可以证明这个方程中的有一个正实根，两个负实根，它们都是不可约的，是不能通过有理数的平方根形式来表示的。因此数量$y$与 $\sin 20°=\sqrt{1-y^2}$ 都是不能用尺规作出的，也即单位圆周上的点 $\cos 20°+i\sin 20°$ 是无法用尺规定位的。这就是说，60°角是不能用尺规三等分的。

综上所述，可知“三分角问题”早在 19 世纪 30 年代前人们就知道不能解了。但由于解放前的旧中国数学知识的不普及，所以在 1936 年还出现过：“××铁路站长×××君用14年时间解决了三分角题问”的特大新闻。直到我国解放初期，科学院数学

研究所每年还曾收到来自全国各地的大量的“自称解决了三分角问题”的信件，有些作者还自称“花费了多少年月才解决问题”的。由此看来，为了避免人们耗费徒劳无功的精力和时间，如何在广大青年中及早普及数学科学知识，将是何等的重要。

当然，如果不限于仅用尺规两项工具来作图，那末几何三大难题也就不成为什么“难题”了。平面几何中的“尺规作图”据说是由古代柏拉图学派定下来的规矩。近代工程技术科学中需要大量作图，当然早就不受上述老规矩的束缚了。虽说“尺规作图法”在近代实际应用上已没有多大意义，但在几何学课程中用以训练青年的分析思考能力还是很起作用的。在历史上一些尺规作图难题的研究，如三大难题和分圆问题的研究，曾推动了一些数学分支（如数论、代数等等）的发展，这也是无可否认的事实。

## 附录三：分圆方程 $Z^{17}-1=0$ 的解法

这里我们来介绍方程 $Z^{17}-1=0$ 的根式解法，也就是高斯于 1796 年发现的解法。这个解法就是设法将原方程的求根问题化成四个二次方程的求解问题，因此除实根 1 之外，其余 16 个复数根最后都可用有理数的四重平方根式表示出来。

首先，将因子 $(Z-1)$ 析出之后，原方程即变为

$$1+Z+Z^2+Z^3+\cdots+Z^{15}+Z^{16}=0.$$

复数根异于零，故可用除两边得到等价方程

$$1+(Z+Z^{-1})+(Z^2+Z^{-2})+\cdots+(Z^8+Z^{-8})=0$$

到达这一步后，看来很难再从五次分圆方程 $Z^5-1=0$ 的解法中得到更多启示。但由于高斯青少年时代即掌握初等数论，所以他借助于一些数论知识，能够顺利地发现把 $(Z+Z^{-1})$，$(Z^2+Z^{-2})$，$(Z^3+Z^{-3})$，…，$(Z^8+Z^{-8})$ 各项分成两组来考虑，也即令

$$X_1=(Z+Z^{-1})+(Z^2+Z^{-2})+(Z^4+Z^{-4})+(Z^8+Z^{-8}), \quad (1)$$

$X_2=(Z^3+Z^{-3})+(Z^5+Z^{-5})+(Z^6+Z^{-6})+(Z^7+Z^{-7})$。(2)
这是解决问题的一个极重要的步骤。因为这样一来，由于 $X_1+X_2=(Z+Z^{-1})+(Z^2+Z^{-2})+(Z^3+Z^{-3})+\cdots+(Z^8+Z^{-8})=-1$，$X_1X_2=4(X_1+X_2)=-4$，可见 $X_1$ 和 $X_2$ 正好是二次方程

$$X^2+X-4=0$$

的两个根。解此二次方程即得

$$X_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \qquad X_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

因此题问便变为如何用根式去求解方程（1）及（2）。为了能逐步求得 $(Z^k+Z^{-k})$ $(k=1, 2,\cdots, 8)$，以便最后求得 $Z^k$ $(k=\pm1, \pm2,\cdots, \pm8)$，可以再把（1）与（2）的右端依次分裂为如下各项：

$$Y_1=(Z+Z^{-1})+(Z^4+Z^{-4}),$$
$$Y_2=(Z^2+Z^{-2})+(Z^8+Z^{-8}); \qquad (3)$$
$$Y_1^*=(Z^3+Z^{-3})+(+^5+Z^{-5}),$$
$$Y_2^*=(Z^6+Z^{-6})+(Z^7+Z^{-7}). \qquad (4)$$

容易看出 $Y_1+Y_2=X_1$，$Y_1\cdot Y_2=X_1+X_2=-1$，故可见 $Y_1$ 和 $Y_2$ 为下列二次方程的两个根

$$Y^2-X_1Y-1=0$$

同理。$Y_1^*$ 与 $Y_2^*$ 为方程 $Y^2-X_2Y-1=0$ 的两个根。由此再解二次方程便得到（注意每开一次平方根，根式前即须取＋、－－两个符号）：

$$Y_{1,2}=\frac{1}{2}(X_1\pm\sqrt{X_1^2+4}$$
$$=\frac{1}{4}\left((\sqrt{17}-1)\pm\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$$
$$Y_{1,2}^*=\frac{1}{2}(X_2\pm\sqrt{X_2^2+4})$$

$$=\frac{1}{4}\left((-\sqrt{17}-1)\pm\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)$$

有了 $Y_1$，$Y_2$，$Y_1^*$，$Y_2^*$ 的具体数值之后，就可以进一步从（3）与（4）两式中去求出诸（$Z^k+Y^{-k}$）的数值了。

例如，对（3）中 $Y_1$ 的右端，可令

$$W_1=Z+Z^{-1},\ W_2=Z^4+Z^{-4}). \qquad (5)$$

于是，$W_1+W_2=Y_1$，$W_1W_2=(Z+Z^{-1})(Z^4+Z^{-4})=Y_1^*$，故 $W_1$ 和 $W_2$ 又可以从下列二次方程

$$W_2-Y_1W+Y_1^*=0$$

求得，也就是

$$W_{1,2}=\frac{1}{2}\left(Y_1\pm\sqrt{Y_1^2-4Y_1^*)}\right).$$

其中 $Y_1$ 与 $Y_1^*$ 都规定在根式 $\sqrt{34\pm2\sqrt{17}}$ 之前取＋号。特别，在上式右端的 $\sqrt{\ }$ 号前取＋号，可算出

$$W_1=\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{17}-1+\sqrt{34}-2\sqrt{17})^2+16(\sqrt{17}+1-\sqrt{34+2\sqrt{17}})}. \qquad (6)$$

由它，经过一些数值计算即可看出 $W_1$ 是个比 2 略小的正实数。这是理所当然的，因为 $Z$ 和 $Z^{-1}$ 是一对共轭复数，故 $W_1=Z+Z^{-1}=$ “$Z$ 的实数部的两倍”

最后，由（5）得知 $Z$ 和 $Z^{-1}$ 满足二次方程

$$Z^2-W_1Z+1=0$$

解出此方程便得到分圆方程的最终解：

$$Z=\frac{1}{2}(W_1+\sqrt{W_1^2-4}),$$

$$Z=^{-1}\frac{1}{2}(W_1-\sqrt{W_1^2-4}) \qquad (7)$$

这里，用（6）式右端代入 $W_1$，便可写出 $Z$ 与 $Z^{-1}$ 的最终

表达式，这些表达式中出现四重平方根号（正因每一重根式前都可取两个符号，所以一共可得 $2\times2\times2\times2=16$ 个复数根）

由于 $W_1^2<4$，故 $Z$ 和 $Z^{-1}$ 都是复数，它们恰好代表复数平面上以原点为中心的单位圆周上的一对等分圆周为十七分之一的对称点，其余的等分点可由 $Z^k$（$k=\pm2$，$\pm3$，$\pm4$，$\pm5$，$\pm6$，$\pm7$，$\pm8$）表出。

显然，按（6）和（7）表示出来的四重平方根数量是可以用尺规逐步作出的，因此正 17 边形作图可能性便获得了确切证明。

从上述高斯解出 17 次分圆方程的过程看来，他的手法确实是高明的。对于这样一个 19 岁的青年应该给予高度赞扬。但是更应该称赞的是他勤学苦练的硬功夫和坚持计算到底的精神！可以想见，高斯当年为了要把单位圆周上 16 个复数 $Z^k$，$Z^{-k}$（$k=1, 2, \cdots, 8$）进行适当排列和分组，使之每一步都满足二次方程，这一定是会费去他不少时间的（当然，他的复数几何知识和数论知识会帮助他克服困难）。显然，如果他缺乏计算到底的耐性，那末也是不可能完成上述发现的。数学史告诉我们，根式求解高次方程的问题，曾占去了十九世纪不少数学家的时间和精力。“数学事业首先是群众性的事业”。正是在深入研究了鲁菲尼、拉格朗日、勒让德、高斯、柯西、阿贝耳等一系列名家工作的基础上，才使得 19 世纪三十年代年轻的伽罗瓦终于形成代数方程的“可解性理论”，即近代数学中所称的“伽罗瓦理论”。如果将这一理论中的一个普遍理定应用于分圆方程 $Z^{17}-1=0$ 时，则由于 $17-1=2\times2\times2\times2$ 便可立刻判定该方程能通过四个二次方程用平方根式解出来。相应地，高斯、温泽尔的分圆理论也就成为一般理论的特殊推论。近代代数学发展的这一历史事实，再次雄辩地证实了数学的发展规律总是从实践到理论，从具体到抽象，从特殊到一般。凡是有作为、有贡献的数学工作者也总是自觉地适应并利用这一客观规律的。

〔注 1〕素数分布函数 $\pi(x)$ 表示不超过正数 $x$ 的素数个数。已知素数序列是 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,…, 故可见: $\pi(5)=3$, $\pi(15)=6$, $\pi(17)=7$,…等等。又对数积分 $\mathrm{li}(x)$ 表示 $1/\log t$ 在 $(0, x)$ 上的积分值。

〔注 2〕设 $p_1$, $p_2$ 是两个不同的素数，则用辗转相除法可找到正整数 $m_1$, $m_2$ 使得 $m_1p_1-m_2p_2=1$。从而有

$$m_1\left(\frac{1}{p_2}\right)-m_2\left(\frac{1}{p_1}\right)=\frac{1}{p_1\cdot p_2}.$$

所以如果能把单位圆周等分为 $\frac{1}{p_2}$ 及 $\frac{1}{p_1}$ 则前者的 $m_1$ 倍减去后者的 $m_2$ 倍，即可得出圆周的 $p$ $p_1$ 分之一。因此应用数学归纳法即可推出普遍形式的高斯分圆定理。

（本文承辽宁师范大学王鸿钧和梁宗巨二教授审阅，使原稿得以改进，特此致谢。—作者）

## 主 要 参 考 文 献

〔1〕H·Polya （波利亚），Mathematical Discovery（数学发现），1962，美国出版。

〔2〕G·Polya, Induction and Analogy in Mathematics（数学中的归纳与类比），1954，英国牛津出版。

〔3〕M·Kline（克莱因），Mathematical Thought from Ancient to Modern Times（古今数学思想），1972，美国出版。（中译本各分册已在国内出版）

---

1978 年秋至 1979 年夏，作者曾先后给旅大市中学教师、吉林省教育学院理科教师进修班和吉林大学数学系的学生作过报告，后于 1980 年 9 月由辽宁人民出版社出版单行本。收入本书时作了文字上的校订。

??????????????????????????????

# 数学家们是怎样思考和解决问题的？

??????????????????????????????

我想历史上有许多位杰出的数学家的思想方法和解决问题的方法是特别值得介绍的。比如16世纪的笛卡儿、17世纪的欧拉、18至19世纪的拉格朗日、高斯、阿贝尔、雅可比、伽罗瓦，还有近代的庞加来、腊马奴扬和现代的爱尔特希等等。这些数学家不仅是解题的能手，而且也是发明创造的大师。在这里自然不可能全面地介绍他们的数学成就和研究问题的思想方法。而只能用举例的方式，概略地谈谈他们**分析解决数学难题的一般策略和手段**（当然也必须谈及他们的一般方法原则）。

首先介绍笛卡儿，他并不是一位纯粹的专业数学家，而是一位哲学思想家。他致力于哲学的沉思可能比在数学思考上花费的时间更多。**哲学家往往具有纵观全局的气魄，喜欢从事物的联系上思考最基本最普遍的问题，**因此他成为解析几何学的发明者是并不奇怪的！而事实上，解析几何就是通过联想发明的。

据历史上记载，笛卡儿在有一次患病之后，一天早晨醒来，躺在床上琢磨着几何学与

代数学的关系问题，通过“联想”，忽然想起几何上最简单的对象“**直线**”能和代数上最简单的对象“**一次方程**”联系起来，**利用点的坐标概念**能在两者之间建立对应关系。欧几里德时代人们就已经知道直线可以看成是由点运动而成的，从而表示**点位置**的坐标（x，y）也就成为一对变量。这样，笛卡儿不仅形成了解析几何的原始思想，而且还创立了变量概念。

笛卡儿还进一步揭示了圆锥曲线（圆，椭圆，抛物线、双曲线）和二元二次方程间的对应关系。他写了一本《几何学》的名著，从而成为解析几何学的创始人。

“联想”能导致伟大的创造发明。上述笛卡儿发明解析几何的故事，正好给我们提供了一个光辉的例子。

联想是一种思维活动，简单说就是把不同事物联系起来的一种思想方法。

在日常生活中人们也常常靠联想去解决问题。比如，天下雨，家里既没有雨伞，又没有雨衣，出门怎么办？雨衣中有塑料雨衣，忽然联想到家里有块塑料布，于是就用塑料布顶在头上作为雨衣的代用品，这就是靠联想解决问题的。

还有一个比较难办的例子。有一个乒乓球掉进一根埋在地下垂直的管道中无法取出来。桌子上放着一壶水，聪明的人**联想到水和球在一起能使球浮起来的现象**。于是把水倒进管道中去，就把乒乓球取出来了。

现在我们来讲讲欧拉的故事。欧拉一生中解决了许许多多的数学问题，在数学上做出了各种重要贡献。从初等数学到高等数学的各门数学中，到处都可以见到欧拉的名字。正如18世纪法国数学家，天文学家拉普拉斯说过的，“欧拉是我们大家共有的老师。”

欧拉特别善于用**联想和归纳法**解决问题。大家知道，代数多项式可以分解因子。通过因子分解，令各一次因式为零便可求出该代数方程的各个根。反之，如果各根为已知，则**多项式**便可用

各根作成的一次式为因式连乘起来，**表示成因子连乘积**。那么，象 $\sin x$ 这样的函数能否表示成因子连乘积呢？这是欧拉通过联想解决的大难题之一。已知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

于是 $\sin x$ 便可看成是一个无限多次的代数多项式。欧拉把它和代数多项式因子分解定理作比较，便联想到 $\sin x$ 也应该能表示成因子连乘积。但因为 $\sin x = 0$ 有无穷多个根，$x=0$，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，$\pm 3\pi\cdots\cdots$，所以 $\sin x$ 应表示成无穷多个因子连乘积。于是通过联想和类比，欧拉便发现 $\sin x$ 可分解成下列因子连乘积：

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots,$$

这便是著名的欧拉公式。这个公式利用数学分析方法可以获得严格的证明。特别有趣的是，如果把上式右端展开，可以看出 $-x^3$ 的系数是

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{3!}\text{.}$$

从而得到自然数平方的级数和公式

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

这又恰好解决了雅可布·伯努利在欧拉生前若干年提出的一个难题。伯努利一生解决过许多级数求和问题，但对平方数倒数和级数求和问题却始结未能解决，因此曾公开提出过上述难题。这难题经过数十年之后才被欧拉所解决，解答即如上所述。

数学上的许多定理和公式是用**联想法和类比法发现的**。**类比法**就是对两个或几个相似的东西进行联想，把它们中间**某个较熟悉的性质**转移到和它相似的对象上去，从而作出相应的判断或推

理。比如，有时人们想问题时常说："我想到办法了"其实就是联想到了。

联想也是一种能力。需要靠学习和工作实践去培养。大凡一个人的知识越丰富，它的联想范围便越广阔，因而联想能力也越强。所谓"联想翩翩，海阔天空"，这不仅对文学作家是必要的，而且对数学家也是重要的。因而缺乏联想，就很难有所创新，有所发现。历史上的杰出数学家不仅善长于"联想"而且还都是善于使用**"归纳法"**的能手。归纳法就是从特殊到一般的思想方法。无数特殊性的事物中往往蕴含有**某种共同性**的东西或普遍关系，把这种共同性的东西或普遍关系找出来表述为一般性命题或普遍公式，这就是归纳法。19世纪著名数学家高斯就说过：他在数论上的许多定理都是靠一般归纳法发现的。至于证明是后来补上的。大家学过**"数学归纳法"**，这是一种适用于现发和论证自然数性质命题的归纳法。它也是从特殊过渡到一般的思想方法。**数学归纳法非常重要**。对搞数学工作的人来说，不说天天用到它，也是年年月月用到它。当人们碰到一个与自然数 $n$ 有关的数学问题时，如果一时无法下手，就应该首先观察简单的情形，即观察 $n=1$，$n=2$，或者 $n=3$ 问题的解（或答案）应该怎样。如果连最简单的情形**问题答案**都无法确定，那么对**一般情形**自然就更无从捉摸了。因此要重视特例，**耐心地观察特例**，善于分析特例，并从中猜想出普遍性的结论。这就是使用归纳法的重要步骤。当然还要学会从 $n=k$ 过渡到 $n=k+1$ 的演绎推理方法。

高斯在 18～19 岁时，就研究古代几何学上流传下来的"圆等分问题"。即用**直尺和圆规如何等分圆周的问题**，也就是如何作正 n 边形的问题。历史上早就知道正三角形、正五边形的尺规作图法。但正七边形、正十三边形、正十七边形等等如何用尺规作图呢？这些便是当年的著名难题。高斯通过联想、类比和归纳法，在他 19 岁（即 1796 年）发现了正十七边形的尺规作图法时非常兴奋，从而他确立了献身数学事业的志愿，后来果然成

为一位杰出的大数学家。多年前我写过一本小册子《浅谈数学方法论》。书中有一个“附录”，就专门介绍了高斯解决正十七边形作图问题的方法过程，并谈到了他的一般分圆定理。这定理就是由归纳法导致的光辉成果。它彻底解答了只有**哪些正多边形才是能够用尺规作图的大难题。**

我那本小册子还谈到了“**倒推分析法**”和“**抽象分析法**”。这些也都是解决数学问题的重点方法。书中特别以欧拉解决“**哥尼斯堡七桥问题**”为例，说明了**抽象分析法**的思想过程。

搞数学研究的人，一辈子都离不开“抽象分析法”。这种方法包含如下的基本过程：

第一步，必须把**应用问题**（或实际问题）表现成**数学问题**。这就需要使用**数学语言、数学概念**和**数学符号**去表述问题。例如，解代数应用题时，用 $x$、$y$ 表示未知数、用 $a$、$b$ 等表示已知数，并按照题设条件、用等式联结起来变成**方程式**。这就是把应用题转化为数学问题。这一步用的是**抽象分析法**。因为用 $x$、$y$ 等代表应用问题中的未知量，就已经是一种抽象的表示法。至于把应用问题中的某种**具体条件或关系**表述成抽象的数学等式或方程式，就更是抽象分析后的结果。使用抽象分析法，必须看透问题的本质，抓住主要环节，略去次要环节

第二步，对已经表述成**数学形式**的数学问题再使用演绎推理或逻辑分析法或计算方法等等去求得答案。当然对已经形成的数学问题，有大有小，有难有易。下面我专门谈论一下处理和解决数学问题的**一般原则**。

面对一个数学问题，为了便于下手解决，最首要的一步，就是要设法**简化问题**。简化的意思有两层，一层是**转化问题形式**，就是把问题改换一个提法，即**改述成另一个相当的形式**，而使得改换后的形式比较熟悉，能和自己已知的知识联系起来。从而可利用已知的知识去求得解决。

波利亚写的《归纳与类比》、《数学的发现》和《怎样解题》

的三部书中就有不少例子谈到了问题变形的技巧。学习数学命题时，必须懂得什么叫**必要条件**，什么叫**充分条件**，还有既必要又充分的条件——简称**“充要条件”**。彻底**理解充要条件的概念**并善于使用这种概念去分析问题，观察问题，那就会转化问题的形式。使面貌生疏的问题转化为面貌熟悉的问题，这样就便于用已知知识来解决问题。

“简化问题”的另一层意思，就是**分解问题**。即把问题分解成**若干组成部份**，也就是把一个较大或较复杂的问题分解成一些**“子问题”**或**“小问题”**，然后把每个小问题各个击破，最后合拢起来也就解决了整个问题。

综上所述，**“简化”包括“转化”和“分解”**。优秀的数学工作者或解题能手，往往都能掌握**转化问题和分解问题**的技巧。这种技巧是怎样获得的呢？当然要靠多解题，多思考、多总结经验。最好是多看看历史上著名数学家是怎样做的！那是会很受启发的。数学问题经过简化之后，不见得马上就能解决。这时还需作进一步分析。对于较难的问题，数学家们有时往往**凭直观和经验去猜测**问题的可能**“答案”**和可能的**“解决途径”**。

怎样去作猜测？这又往往要使用联想和类比方法。又怎样去探求解决途径呢？一旦已经有了比较自信的认为合理的“猜测答案”之后，数学家又往往采取**倒推法**去寻找解决问题的途径。（包括利用倒退法去探求答案成立的**条件**等等）。有时还需要补充使用尝试成功法或试探法。

国外有些科学方法论专家和心理学家已经在研究“联想的规律”、“类比的方法”、“猜测的技巧”等等。我想这方面的研究是很重要的，因为它有助于培养人们的创造发明和解决问题的能力。

---

*本文是作者 1982 年 9 月 24 日在长春给参加全国数学竞赛者所作报告的一部分。原载中国科学院心理研究所，长春教育学院、长春市数学学会编的《数学学习心理》1988 年第 2 期。收入本书时作了文字上的校订。

# 直觉与联想对学习和研究数学的作用

## 一

“对待数学必须重视逻辑推理的严谨性，需要掌握演绎论证的技巧。”这些都是数学教师经常告诫学生的有益教诲。现代心理学家常把理性的逻辑思维叫作收敛思维，而把感性的、直观的想象、联想、猜想等思维运动形式称为发散思维。这里，我想专门讨论属于发散思维范畴的直觉与联想在数学思维过程中的积极作用，并将举例介绍自己的点滴经验，以供青年同志们参考，并希读者批评指证。

我在大学读书时，在几位数学老师的启发下，使我逐渐懂得直觉能力（又称直观力）在理解数学和进行创造性思考中的重要性，并且领会到这种能力是可以在学习的过程中逐步成长起来的。我们学习数学理论、方法或数学定理时，怎样才算真正懂了呢？事实上，只有做到了直观上懂才算“真懂”。所谓“真懂”的意思是指：对数学的理论、方法或定理能洞察其直观背景，并且看清楚它是如何从具体特例过渡到一般（抽象）形式的。

如此说来，为了达到“真懂”或“彻悟”的境界，就不能只停留在弄清楚演绎论证的步骤里，而必须重视具体特例的分析，必须注意直观背景素材的综合，也即必须通过人脑的联想力和概括思维能力从具体素材中领悟出最基本、最本质、最一般性的东西。达到了这个境界，数学上的理论、方法或定理就就好象是您自己发现的一样，您就能用自己的语言随时把它复述出来，当然也就成为您终生不忘的知识了。

如果一位数学教师，只是给学生讲清楚一些数学定理的形式演绎论证步骤，不指出那些定理的直观背景和整个来龙去脉，那就好比带领一个人进入森林中只看到了一些个别的树木，但对整片森林的形貌还是一无所知，这就所谓“见树不见林”。优秀的数学教师无疑都会使学生“既见树、又见林”。但要做到这一点也不是容易的事，教师本身首先要对数学教材作一番整体性的分析概括，使教材内容成为他自己脑海中非常直观浅显的东西。这样才可能使学生也感到所学的知识是比较直观的，是完全符合他们的认识过程的。

记得40多年前我在西南联大时的老师华罗庚先生曾不止一次地对我们讲过他的读书经验。他说“读一本数学书、应该把它读得越读越薄。”怎样变薄呢？其实，就是要把书中的知识经过彻底消化，变为非常直观的、非常概括的材料，最后就只留下最精髓的那一点，当然书就变薄了。

## 二

“数学的直觉”是有丰富的含义的，南京大学哲学系教师郑毓信同志曾对此作了分析讨论(见1983年《哲学研究》杂志)。大家知道，近代数学基础问题研究领域中有一个“直觉主义流派”。他们的观点是十分偏激的，但在西方数学界却有一定的影响。在这里，我并不想分析评述这一流派的思想方法和观点。现在我想

讨论的是另一个问题，即一般数学界较为普遍认可的“数学直觉”的内容含义。

我在青年时代曾经读过法国数学家庞卡莱《论数学的创造》一文，后来还阅读了阿达玛的《数学领域的发明心理学》一书，感到很受启发。“尽信书不如无书”，当然我们不可能完全同意书中的一切观点。但是，这两位杰出的数学家以他们自己的经验所阐发的某些心智活动规律，已经成为现代“创造学”研究工作者，特别是一些心理学家分析探讨的课题。

毫无疑问，如能根据辩证唯物主义的反映论观点去研究评析庞卡莱与阿达玛的数学创造学说，那将是很有意义的工作。

按照庞卡莱、阿达玛的见解，数学上的创造发明同自然科学领域中的发明创造一样，无非是“选择”而已。这就是说，无非是选择最有用的“观念组合”，以产生新思想、新概念、新发明。那么凭什么能作出观念组合的最佳选择呢？他们认为选择能力的基础就是“数学直觉”，而数学直觉的本质就是某种“美的意识”或“美感”。这样说来，似乎就有点令人感到奇妙而难以捉摸了。

其实，通俗点讲，“数学直觉”应包括人脑认识反映过程中的“美的直觉”、“真伪的直觉”和“关系的直觉”等几个方面。因为一切事物（包括作为数学概念背景的事物或对象）都是处在对立统一和普遍联系的关系之中，所以在它们之间会呈现出某种对称性、协调性、统一性和简洁性，这些便构成美的直觉内容。凡是学得的数学知识越多，便越会增强“数学美”的直觉意识。正是这种意识能帮助人们去选取数学观念间的最佳组合，从而形成新的数学思想或概念。新思想、新概念经常以“顿悟”的形式出现，“顿悟”实际就是认识过程的飞跃。

许多有经验的数学工作者，在探索数学真理的过程中，常常会作出这样或那样的近乎正确的数学猜想。实际上很多数学定理最

初都是猜出来的，而证明不过是后来补行的手续。猜想正是人们借助于“真伪的直觉”所表现的思维形式。这种思维形式对推动科学进步是很起作用的，我们从事数学工作的人也往往是离不开这种思维形式的。

在数学领域里，“关系的直觉”内容也很丰富，例如关于“序”的直觉、“相似性”与“相关性”的直觉、对应关系的直觉、连续性的直觉，以及空间的对称性直觉等都属于这一范畴。我们从事数学研究时，常常凭借这种直觉产生类比联想，把一些表面上似乎无关的对象纳入到同一个更高层次的理论框架中去。只要瞧一瞧现代各门高度发展了的数学理论结构体系的丰富概括性，就可以意识到人脑思维的“关系直觉”在现代数学结构体系的发展中起了多么重要的作用！

所有上述各种直觉，当然不是天赋的，一个人从童年时期学习算术起，就开始逐步发展上述各种直觉能力，事实上，一切直觉能力都是通过实践成长起来的。

## 三

直觉能力和抽象思维能力是相辅相成的。如果没有任何直觉作基础，则数学的抽象思维是根本不能进行的。大家知道，19世纪德国的分析数学大师维尔斯特拉斯是一位十分严谨的数学家、他曾经令人信服地作出了一个“处处连续处处不可微”的著名的函数例子。这个函数的直观含义是，它在每个无限小郊域内都有无限小振幅的振荡。当然这可以凭借极限手段来作出。后来，代数学家范德瓦尔登根据同样思想干脆利用折线函数的无限叠加来作出具有同样性质的函数。试想，假如上述两位数学家缺乏生动的直观能力，那又怎能构造出上述例子呢？

从感性到理性，从生动的直观到抽象思维，这是任何一位数

学工作者都必须遵循的认识规律。数学直觉既是抽象思维的起点，又是抽思维的归宿。通过抽象性思维，对数学对象的本质有所洞察，有所概括，这样就形成了更高层次的数学直觉，从而又可进行更高层次的创造性思维活动。

直觉与联想这两种思维运动形式也是互为因果的。前者促进后者的展开，而后者又反过来充实并发展前者的内容。所以对于一个学习或研究数学的人来说，为了开发智力必须同时注意培养直觉与联想两种能力。怎样培养呢？我想，首先要注意培养较广泛的兴趣，要博览群书，好学深思，要提倡多想问题，甚至不限于思考数学领域的内部问题。

从数学史上我们看到许多作出大贡献的数学家往往不是专攻数学一科的学者。他们往往怀有广泛的兴趣去研究其他有关应用部门的种种问题，以及和生产实践相联系的问题，因此他们的联想特别丰富，数学直觉能力也特别强，而作出的创造发明也最多。

我国宋代爱国诗人陆游曾谈到学习作诗的经验，他说过："纸上得来终觉浅"，"功夫全在诗之外"。其实，对从事数学工作的人来说道理也是一样的，必须注重实践，联系实际，要经常动手去解决问题，才能把数学工具掌握到手，并能有所创造。不能只把自己的视野总是局限于一个科目或一个分支，否则由于联想范围的狭窄就很难作出有意义的贡献来。一位英国科学家曾说过：一个人如果长期钻研一个问题，就容易使自己的思想枯涩起来，当然不可能发展创造能力。特别是他曾经谈到："成功的科学家往往是兴趣广泛的人，他们的独创精神可能来自他们的博学。"我想，这句话是很有道理的。

## 四

这里我想谈一点亲身经验，说一说直觉与联想是如何在我的

一项工作中起到推进作用的。我在青年时代跟华罗庚教授学习数论时，曾听说他去重庆时破译了当年侵华日军军事密码中利用麦比乌斯反演公式一事。这就引起我对上述反演公式的兴趣。1964年我又闻知美国的组合学家罗塔对上述反演公式作了高度的抽象概括，使其成为组合学中的重要工具。接着 1967 年我曾利用互反 μ 函数概念把麦比乌斯罗塔的公式进行拓广并作了种种应用。但上述拓广毕竟是十分平凡的，并无实质性的发展。

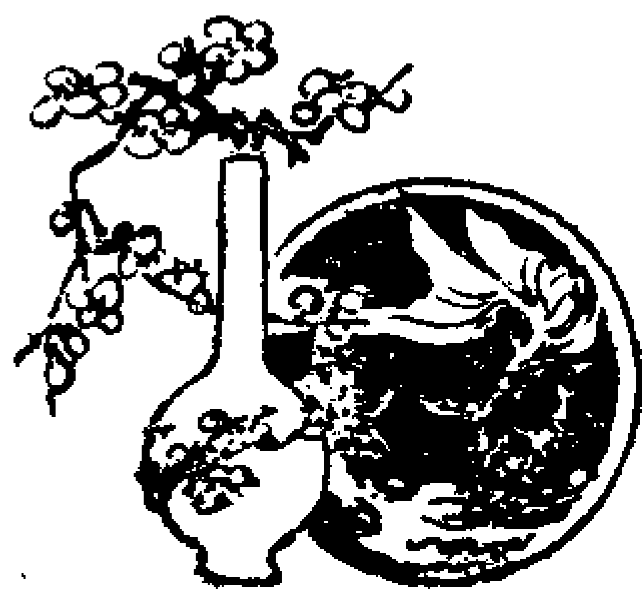
1980 年后我开始思索一个更基本的问题：离散数学中的反演公式是否可以和分析数学中的著名反演公式如牛顿、莱布尼兹积分学基本定理等获得某种统一呢？这就涉及到离散数学与连续数学两类不同结构的沟通问题。开始我并没有找到这种沟通的桥梁。但借助于关系直觉使我仿佛模糊地意识到鲁宾逊的“非标准分析”方法有成为桥梁的可能。这个联想是怎样形成的呢？因为注意到非标准微积分学中，定积分可以作为精细分割点列上的离散形式的总和的标准部分。这就是说，定积分对应的和式在非标准数域上具有离散化的形式。这就使我直观地猜想到离散型的广义麦比乌斯反演公式有可能推广到非标准数域上去。接着我就逻辑地验证这个想法，果然达到了目标，得到了一条普遍的反演定理。它把组合学中的反演公式和卷积方程论中的一些反演定理（包括微积分基本定理）都作为特例概括进去了，我想这个工作的意义并不在于拓广本身。而主要在于表明：离散数学与连续数学的特定部分是能够实现沟通的。同时还表明“非标准分析”方法确实能起到一般标准分析学所不能起到的作用（上述初步结果已发表于 1983 年《科学探索》 3 卷 1 期上）。

由上所述。可见学习上的“不保守”或许也是一点值得介绍的经验。事实上，假如在 70 年代我采取了象国外有些分析学家瞧不起“非标准分析”的态度，或者干脆轻率地认为那不过是“标准分析”的等价物而已，那么我就不会虚心地去学习非标准分析，也就不会使自己的想象力伸入新的领域，当然更不可能发现

离散数学与连续数学中两类重要的反演关系能够统一起来。

我搞了40多年的数学工作，深深感到学习和研究数学是互相促进的。学习数学知识必须重视生动的直观背景并采取分析研究态度，才能学得透、学得活。另一方面，研究工作过程中又必须随时学习新知识、新工具，这样才能开阔视野，扩大联想领域，获取新的成果。

数学上的创新和发明决不是神秘莫测的事情，只要坚持辩证唯物主义的反映论观点，就不难发现客观规律。只要很好地运用这些规律，人人都能进行创造发明活动。本文讨论的数学直觉与联想不过是数学发明创造心智过程中的两个环节而已。这些涉及“微观数学方法论”的问题，在 1983 年出版，1988年修订第 2 版的拙著《数学方法论选讲》（由华中工学院出版社出版）一书的第 10 讲与第讲中已作了较多的论述，这里就不多说了。



---

本文及后面的《数学方法论与数学教学改革》一文均选自黑龙江教育出版社1988年出版的《数学家谈怎样学数学》一书。收入本书时作了文字上的校订。

# 数学直觉的意义及作用

## ——论培养数学直觉应是数学教育的重要内容

### 一、问题的提出

本文将结合高等学校数学教育的革新来探讨数学直觉的含义、作用及有关问题。

如大家所知，在现今理工大学的数学教育与教学过程中，对学生们逻辑思维能力的培育和训练，一般都给予足够重视的。这种重视当然是必要的。但是，相对说来，和创造发明能力相联系着的数学直觉力的培育，却往往置于被忽视的地位。这里可能有两个原因：一是由于传统习惯的影响，大多数的数学教材内容和教学过程都倾向于关注和强调逻辑推理的严谨性，而无形中忽视或者低估数学直觉在智力开发中的作用。二是由于数学教学法的研究水平，未能上升到创造性科学研究的高度，这样就不可能把创造性的认识过程规律自觉地反映到教学中去，自然也就不会意识到数学直觉在掌握和开发数学知识过程中的重要性了。此外，可能还有一个正如 C. 波利亚所指出的原因是："对一些教师来说，数学是一套严格的证明系统，……在课堂上讲授时，他们就怕由

于不严谨、不完全而有损于个人威信”（见《数学与猜想》第二卷。176—177 页）。

不妨提出这样的问题：我们去学习数学的理论、方法或数学定理时，怎样才算真正“弄懂”了呢？对此问题可能有各种说法，但是多数高明的数学教师和研究工作者会同意这样的回答，即只有做到了直观上懂了才算“真懂”的意思是指对数学的理论、方法或定理能够洞察其直观背景，并且看清楚它们是如何从具体特例过渡到一般（抽象）形式的。如此说来，为了达到“真懂”或彻底领悟的境界，就不能只留在弄清楚演绎论证的步骤里，而必须重视具体特例的分析，须注意直观背景素材的综合，也即须通过人脑的联想力和概括能力从背景素材中提出最本质、最一般性的规律，这就是反映论所说的从直观思维到理性认识的“飞跃”。正是需要经历这种“飞跃”，才能达到真懂的境界，这样数学上的理论、方法或定理就好象是你自己发现的那样，你就能用自己的语言把它复述出来，当然也就成为你终生不忘的知识了。

如果一位数学教师，仅仅给学生讲清楚一些数学定理的证明步骤，而不指出定理的直观背景和整个来龙去脉，则就好比让人看到了森林中的许多树木，但对整片树林的形貌还是一无所知，这就是所谓“见树不见林”。优秀的数学教师当然都会让学生“既见树、又见林”。但是要做到这一步也不是容易的事。首先教师本身要对数学题材有一番生动直观的整体性认识和分析概括，使题材内容成为他自己脑海中非常直观浅显的东西，这样才可能诱导学生也会从直观上真正弄懂所学到的知识。

由上所论，可见生动的数学直观（或直觉）对理解数学是重要的。不仅如此，由于数学是一门活生生的不断发展着的科学，我们还需要培养学生主动发掘数学知识的精神以及创造性地应用数学工具的能力，这样，数学直觉力这个因素就更不可忽视了。因此，结合数学教育问题来看，不能不研究下列两个问题：

一是数学直觉的确切含义是什么？它具有哪些内容和作用？

二是在数学教育中应如何促进数学直觉这个因素去发挥积极作用？应通过怎样的过程去培育数学直觉能力？

在本文中我们试图围绕这两个问题作一番分析讨论。但只是抛砖引玉，希望关心高校数学教育革新的同志们将能继续深入地研究这些问题。

## 二．数学直觉的含义、内容及作用

关于数学直觉的哲学意义的讨论，有郑毓信同志的“数学直觉浅析”一文（载哲学研究 1983 年）值得参考。这里不妨再按照反映论观点作一简短说明。事实上，数学直觉并不是什么神秘的东西。作为一种思维运动形式来看，它是人脑对于数学对象事物（结构及其关系）的某种直接的领悟或洞察。这是一种不包含普通逻辑推理过程（但可能包含着“合情推理”形式）的直接悟性，故属于非形式逻辑的思维活动范畴，而通常把它归属于现代心理学家所谓的“发散思维”范畴。

数学直觉往往产生于经验、观察、归纳、类比和联想的基础上，有时以心理学上的“顿悟”形式出现，实际上也就是认识过程的一种飞跃形式。例如，我们思考一个数学问题或命题。有时经过一段曲折道路之后，忽然出于某种联想而豁然开朗；或是想到了一个解决方案；或是猜到了一条证明途径等等，这些就是以数学直觉为基础所形成的顿悟。有些学者往往把直觉和顿悟等同起来，但这样也容易引起误会。因为一般数学直觉未必都是瞬间完成的，通常它需要一个酝酿过程，补充和反应过程，事实上，渐悟和顿悟都是直觉的表现形式。

总之，数学直觉是一种直接反映数学对象结构关系的心智活

动形式，它往往构成思维与对象之间的直接联系，并以直接推断形式（例如以洞察、预见或者合理猜想等形式）把握住对象关系的本质。正是上述思维形式能够促使人们预见通向真理的道路，彻底悟通数学真理并能导致创造发明。因此在数学教育中理应把培养数学直觉力作为一个不容忽视的目标。

精略说来，直觉具有“了解事物整体”的作用，还具有将细节“组合成和谐性整体”的性能（这两点西方哲学启蒙人笛卡儿就已经明确地解释过）。此外，数学直觉还具有审美作用，具有辨别真伪性的作用。特别值得重视的是，直觉有时能把一些事物间的隐微关系串联起来，给人们提供解决疑难的线索，或者揭示某些论证命题的路线。所以数学直觉的内容方面很广，它包含着“审美直觉”、“关联直觉”和“辨伪直觉”等等，而这些直觉又是相互关联的。

已故法国数学家阿达玛写过一本《数学领域的发明心理学》，书中曾发挥了杰出的法国数学家庞加莱关于数学发明创造的学说。他们的共同见解是认为数学创造发明的关键在于选择数学观念间的“最佳组合”，而这种最佳选择往往就是依靠“美的直觉”作出的。事实上，任何一个数学工作者在研究过程中都会遇到无数可能的组合，对所有这些组合进行研究是办不到的，其中大部分不值得研究，少部分会出成果，偶而会出现百年难逢的良机。历史上有些有益的组合曾多次被许多人遇到过，然而只有适逢其人才能被抓住，这里鉴赏力高低是个重要的因素。正如存在文学鉴赏力和艺术鉴赏力一样，也存在数学鉴赏力。只有一个具有丰富知识和高度赏力的数学工作者，才能根据其本身的价值而不是根据当时流行的观念作出判断，从而选择出最佳的组合。数学鉴赏力依赖于对数学美的直觉，依赖于对数学美的敏感性，因此数学美的直觉有重要的作用。美的形式千变万化，美的标准也是各式各样的，这里我们只列举两条标准。第一条是弗兰西斯·培根早就揭示过的标准：“没有一个极美的东西不是在调和中有着

某些奇异！”（这里奇异含有达到惊愕和诧异程度的例外的意思）第二条是由海森堡所归纳的标准：“美是一个部分与另一部分及整体的固有的和谐。”概括地说，一种是“和谐美”，一种是“奇异美”。

对数学而言，和谐美表现为统一性、简单性、对称性、不变性（守恒性）、恰当性等等。所谓统一性就是部分与部分、部分与整体之间的协调一致。两千年来、科学的发展不仅不断地向人们提供对世界规律的新认识，同时也不断地把种种令人赏心悦目的图景贡献给人类。大自然具有统一性，数学作为描述大自然的语言必然也具有统一性，因此数学的统一性是客观世界统一性的反映。从解析几何、微积分的诞生到近代数学的许多重大成果都体现出数学的统一性。和统一性相关联，简单性也是数学工作者追求的目标。庞加莱说：“因为简单性和深远性二者都是美的，所以我特别愿意寻求简单和深远的事实，”世界不仅是统一的，并且统一于一个简单的规律，而在繁杂之中概括出一种简洁明了的规律，则给人一种美的感觉。例如 $F=ma$，$E=mc^2$ 等都是既简单而又意义深远的范例。优秀的诗词讲究用最少的字表达最丰富的内容，而这些公式用字之少，表达的内容之丰富，远非任何一首诗词所能比拟的，因此给人以深刻的美的享受。对称性的美是众所周知的，恰当适度也是一种美。数学家总是追求充分必要条件，最佳估计，最佳逼近，不多不少，恰到好处，这也是一种美的标志。正如同我们说一个雕塑人象不高不矮，不肥不瘦，一切部份都适中合度，恰到好处是一种美的标志一样。

另外一种重要的美就是奇异美。奇异是一种美，奇异到极度更是一种美。例如处处连续处处不可微的函数，皮亚诺曲线等，数学家们看到这些高度奇异的结果时的感觉与人们看到极其珍奇的艺术品时所感到的震颤是一样的。正如培根所说的那样，任何一个极美的东西都在调和之中包含着某种奇异。数学的发展就象精彩的故事一样的波澜起伏，扣人心弦，既在情理之中，又

在意料之外，是和谐与奇异的统一体。在数学史上不断出现统一各个部分的新理论，同时又不断出现无法包括在这个理论之中的奇异的对象，这些奇异的对象又反过来促进数学的发展。在古希腊时期，毕哥达拉斯学派以有理数为基础解释宇宙，并且自认为已经达到了和谐与统一。无理数的出现打破了这种和谐，促使人们从依靠直觉、经验而转向依靠证明，导致了公里几何学的产生。在很长一段时期内，欧氏几何几乎是全部严密的数学的基础，和谐与统一的典范。但是非欧几何的诞生又打破了这种和谐。再如罗素悖论的提出，动摇了集合论的基础。这些都是迫使人们不得不对几何基础以及数学基础进行更深入的研究。许多奇异对象的出现，一方面打破了旧的统一性，另一方面又为更高层次上建立新的统一奠定基础。虚数曾经被认为是奇异的、虚幻的对象，然而正因为有了虚数，才有了代数基本定理和复变函数论、使代数与分析学分别在更高的层次上达到了和谐与统一。$\delta$-函数是具有高度奇异性的函数，不能包含在古典函数的范畴内，然而正因为有了 $\delta$-函数，才能建立指数函数与多项式的傅里叶逆变换，广义函数论才能诞生，线性常系数偏微分方程的一般理论才能建立起来。在线性常系数偏微分方程的一般理论建立之后，许多数学家满怀信心地试图在广义函数论的基础上建立线性系数偏微分方程的一般理论。可是就在这个时候，汉斯·列维构造了一个反例，指出即使在广义函数的范畴内，变系数方程也可能无解，这就为偏微分方程研究开辟了新方向。数学中这样的例子很多，在某种意义上，数学中的和谐性与奇异性是世界的统一性和多样性在数学中的反映。客观世界表现为统一性与多样性的统一，而数学则是和谐性与奇异性的统一。

在数学领域里，关联直觉的内容也很丰富。例如关于序的直觉、相似性直觉、相关性直觉、映射关系的直觉、连续性直觉、对称性直觉等属于这一范畴。人们从事数学思考时，常常凭借这类直觉产生类比联想，把表面上似乎无关的对象串联起来，纳入

到统一的更高层次的理论框架中去。不少解决问题的方法和途径是通过关联直觉发现的。例如微分方程与差分方程、积分与级数、线性积分方程与线性代数以及一般地连续与离散之间的类比联想，产生了许多结果。这些都是关联直觉的产物。在关联直觉中，几何直观与物理直观具有头等重要意义。麦克斯威尔有把每个数学物理问题在头脑中构成图象的习惯，而几何直观甚至图画比喻在科学思维中能起重要的作用。例如在泛函分析中对无穷维空间定义了向量、长度和内积，把许多分析结果变成几何学的命题。借助这个类比，我们可以凭几何直观去猜测分析学中的新定理，先用初等几何的直观猜出定理，然后用泛函分析的术语去证明它，许多数学工作者其实就是这样作的。物理直观也是十分重要的，从积微分和微分方程到近代的弧立子和纤维丛，物理和数学一直有着千丝万缕的联系，物理学一直是数学创造思想的丰富源泉。

“简单性是真的印记”“美是真的光辉”，真的一定美的，我们可以参照这些线索去寻找真理。但是我们必须注意，简单性有不同的层次，而有时只有在更高的层次上才能实现真和美的统一。如果只坚持在同一层次中追求简单和美，则会导致谬误。例如，圆是简单完美的图形，古人曾经设想所有天体按圆周轨道运动，这被实践证明是错误的，后来正是牛顿以万有引力定律为基础，建立了天体运动的统一理论，才在更高的层次上达到了真和美的统一。又如，在很长的时期内欧氏几何是几乎全部严密数学的基础，微积分出现以后，大批分析学的结果不再能包括在初等几何的框架之内。但是当我们用无穷维空间代替有穷维空间，用拓扑结构代替欧几里得度量，那么这种新的更高层次的“几何”依旧是数学的基石之一。我们还要指出，虽然直觉对认识真理和发展真理有重要的作用，但是决不能盲目信任直觉的作用，或让美的鉴赏力一类的词句去迷住眼睛，以致看不见一切主观思维所具有的危险性。须知直觉导致错误的例子数不胜数；任何“数学

直觉俘获来的战利品”都需要经过严格逻辑验证，并且最终经过客观实践的检验，才能成为真理宝库中的财富。因此，我们强调直觉，并不是否定逻辑的作用，事实上直觉和逻辑是数学创造的双翼，它们相互补充，交互为用，都是数学工作者进行创造的武器。

## 三、培养数学直觉是数学教育的一项重要内容

直觉并不神秘，人人皆有。数学直觉对数学工作者也大抵如此，只不过多少不同而已。譬如猜谜语，通常成年人较小孩更容易猜中谜底，这是因为成年人生活知识丰富，经验多，从而联想能力较强的原故。从小孩到长大成人，猜谜语的能力也随之增长，这说明猜谜语的能力是后天培养而获得的。我们既学会猜谜语，也就学会猜定理，猜证明。我们的知识越多，猜的经验越丰富，猜中的机会也就越多。因此，猜定理、猜证明的能力也是可以通过实践培养的。数学美的鉴赏力和艺术美的鉴赏力一样，有其客观的标准，人们可以经过培养提高自己的艺术鉴赏力，同样也可以经过培养提高自己的数学鉴赏力。总之，数学直觉是可以后天培养的。实际上每个人的数学直觉也是不断提高的。比如，对小学生来说，引入未知数是很抽象的，但对大学生来说，则是非常具体直观的对象。而群、环、域、张量、黎曼曲面等对大学生感到非常抽象的概念，而对搞范畴论，拓扑学的数学工作者来说，则又是很具体的对象了。这一方面说明抽象有不同的等级之分，另一方面也说明人的数学直觉力水平是可以通过学习不断提高的。

培养数学直觉不仅是可能的，也是十分必要的。大学教育的目标之一就应该是激起学习者对数学科学的喜爱并获得一定的审美能力。“善教者使人继其志”，如果教师能使学生热爱数学，那么即使他现在学得不好，将来也一定会学好，这是因为只有

"热爱"才是最好的考师。反之，如果在教学过程中学生感到数学是枯燥无味或艰涩难懂的，甚至讨厌数学，那么这样的教学自然是失败的。正如同没有音乐鉴赏力的人听不懂贝多芬的交响乐一样，一个没有数学鉴赏力的人既不能理解数学内在的美，也不能理解到生活环境里处处存在着数学的旋律，不能理解从物质微粒的每一震颤到巨大天体的庄严运行都服从数学的定律，从而也不能发自内心地热爱数学。因此，教师应该通过举例分析教会学生鉴赏数学，懂得数学美表现在哪些地方，如何从数学美的观点分析评比各类数学定理和它们的证明方法。比如特征值理论美在什么地方，有什么用处，"特征"两字应该如何理解，代数基本定理美在什么地方，"基本"两字如何理解，如何分析评论代数基本定理的各种证法等等。为了培养学生热爱数学，还要选用各种典型例子去启发学生认识到生活中处处有数学的美，数学是大自然的语言，辩证法的辅助工具和表现形式。比如我们听课或听报告，有时收获大，有时收获小，但我们习以为常，没有深入思索，从来没有想到把收获大小用测量表示出来；一个人总说废话，我们也没有想到把"废"的程度用测量表示出来，没有想到这里面有什么数学理论。但申农则不然，他从这里面提炼出信息量、多余度、通道容量、抗干扰能力等重要概念，指出信息概念相当于热力学熵的负值即"负熵"。接着，从这些基本概念出发，逢山开路，遇水塔桥，克服前进路上的重重困难，用演绎方法建立起信息论的理论体系，指出提高抗干扰能力和通信效率的途径，为通讯理论、控制论、生理学、生物学甚至社会科学开辟了新的研究道路。此外，对高年级学生或研究生而言，通过举办讲座或课外阅读指导，那怕只是大致了解一下外尔在理论物理、冯·诺依曼在量子力学、博奕论、数理经济、电子计算机、人工智能，维纳在控制论，图灵在计算机理论，生物化学与形态发生学，托姆在突变理论等方面的工作梗概，也有助于理解到数学的应用多么广阔，影响多么深远，这些数学家的联想力又是多么丰富，从而

会提高他们的数学鉴赏力，增强对数学科学的热爱。

数学教育的另一个重要目标，就是培养学生的创造能力。特别是在教学过程中要引导学生大胆作猜想，要鼓励学生学习猜定理，猜证法。猜错了也不要泼冷水，而要鼓励他们去寻找猜错的原因。最近国内已经出版了波利亚的名著《数学与猜想》的两卷翻译本。其基本题材是很初等的，但所述“合情推理原则”具有一般性，很值得参考。著名数学家希耳伯特说：“了解一种理论的最好方法是找出然后是研究那种理论的原型的具体例子。”阿蒂亚也说：“愿向学数学者提出最有用的建议，就是对响当当的大定理问问有无特殊情形，既简单而又不无聊。”这些经验之谈不仅指出一个掌握定理的方法，同时又给人们指出一个学习猜定理的方法。因为那些响当当的大定理往往是数学家根据一些简单具体的原型猜出来的。猜定理的办法很多，我们可以利用几何直观去猜测定理，例如用有限维空间的结果去猜测泛函分析的定理；用离散情形的结果猜测连续情形的结果。例如用级数的结果去猜测积分的结果，也可以反过来用连续的结果去猜测离散的结果，例如根据微分方程的结果猜测差分方程的结果，等等。庞加莱说“物理学不仅仅向我们提出问题，而且还能使我们预料到它的解答。”一个有实际经验的人常常能猜到某些问题解的下上界，甚至可以猜出极值点的位置。猜的途径是各种各样的，甚至可以依据哲学、美学方面的准则。须知一个理论在美学上的缺陷，常常也是它在科学上的缺陷。一个人学识越渊博，联想力越丰富，途径就越多。前面提到的庞加莱、希耳伯特、外尔、冯·诺依曼、申农、维纳、图灵、托姆等人都是有说服力的例子。我们所提到不少兴趣广泛、富有直觉力的数学家，他们都无例外地具有为实际应用目的去开发数学新领域的精神素质。显然，这种精神素质也应该是我们培养人才时所不可忽视的重要方面，因为只有具备这种精神素质的人，才能真正作到面向世界，面向未来。

综上所论，我们提出了数学直觉力的培养应成为数学教育重

要内容之一的论点。据据这种论点，也就必然要提出现今高校数学教材必须进行革新的问题。我们赞成这样的观点：大学数学课程的各门教材应该弄得少一些、活一些。教材应该反映时代的进步面貌，所以“力求新颖”是必要的。此外，“少而精”原则也是大家一贯提倡的。看来只有“活一些”这一条大有讨论的必要。怎样搞得活一些呢？按照本文的观点，就是要设法把培养“数学直觉力”的因素考虑进去。比方说，在数学教材或教学参考书中讲讲“数学美”的评判标准，添进一些讲授“数学猜想”艺术和有关“数学发现”技巧的题材，这些题材如能处理恰当，则对进行启发式教学和培养学生的创造能力应该是十分有利的。此外，我们还认为辩证唯物主义认识论（或反映论）的学习，包括数学发展史与数学方法论的学习，对于培养创造能力的人才来说也是必不可少的。

（刘则渊同志对本文提出有益意见，已做修改，特此致谢。）



本文是作者与张鸿庆合写的论文，原载大连工学院编《高等教育研究》1984年第1期，收入本书时作了文字上的校订。

# 数学研究中的创造性思维规律

## 数学研究的目的

众所周知，现代科学技术处处都要用到数学。事实上，对各科技领域中许多问题的分析，都将归结为数学课题的研究。此外，数学在其本身的发展过程中，还要解决一系列或大或小、或难或易的内部问题，这即为数学本身的研究内容。

普遍认为，数学主要是关于理想化的“量化模式”的研究。这一观点是英国数学家兼哲学家怀特海于40多年前提出的。如果使用“模式”这个词来表示事物（包括抽象物）关系结构的形式模型，那么则可以说，数学在各个不同的抽象化层次上，总是从业已模式化的个体出发，在进一步的抽象过程中对可能形成的模式进行研究。显然，现代数学诸分支的发展情况正好说明了这一事实。

由此可见，现代科学研究的目的无非是要发现数学模式、构造数学模式以及扩充和发展数学模式。这里应对数学模式的含义作广泛的理解。例如，不仅工程师和应用数学家使用的

各种数量模型都可视为数学模式，而且关于各种数学问题的处理方式和解决方法以及各种数学理论结构体系，也都属于模式之列。小而言之，哪怕是一个数学公式、一条数学定理、一种计算方法或是一个带有某种一般性的数学概念，也应看作是一种或大或小的模式。当然，凡是数学模式都应具备一意性、精确性和一定条件下的普适性。

数学模式是在一定的抽象层次上反映和表现关系结构的。因此，如何运用思维技巧和特定的逻辑工具去发现、提炼、设计、构筑和表现各种合理而有用的关系结构(或结构系统)，便成为数学创造性研究的主要内容。在近现代数学发展史上，许多有杰出贡献的数学家都是最善于发现和构筑关系结构体系的能工巧匠。

## 数学中的发现和发明

数学中的概念、公理、命题、公式、证明以及各种理论系统，究竟是发现的还是发明创造出来的？这是个需要认真讨论的问题，数学家们对此众说纷纭。

最简短的辩论可以这样开始：有 A、B 两人，A 认为象 $3+5=8$ 这样一个等式只能被发现而不能被发明，因为它反映了客观存在的一种数量关系，而这种关系显然不是人创造出来的；但 B 认为，黎曼关于多值复变函数单值化的黎曼面这种纯想象的创造物，不能在现实世界中找到相应的原型。于是，也许会有一个第三者 C 出来说：看来初等数学的题材，多半是直接反映现实世界中的数量关系和空间形式的模式，因此可认为是被发现的事物，而现代高等数学中的许多东西，多半是人脑纯理想的“自由构造或创造”，所以应看作是被发明的产物。

这样，C 所采取的调和折衷的观点，就可能同时为 A、B双方所接受，但仍然没有从根本上解决“数学发现”与“数学发明”的争议问题。因为数学科学是一个统一体，初等数学与高等

数学只有层次上的不同，而作为反映关系结构的模式却并无本质区别。

发现与发明的争议始终存在于数学哲学界的柏拉图主义派与直觉主义派之间。前者坚持数学对象的客观存在性，后者强调数学构造的主观创造性。例如，直觉主义派的鼻祖罗内克坚持认为除了自然数是上帝创造出来的之外，数学中的其余一切事物都是人们心灵的创造物，也就是发明的产物。

既然数学的实质是分析、建立并研究“关系结构的量化模式”，因此“发现说”与“发明说”的争议根源可以归结为数学模式的客观性与主观性问题。

笔者曾与郑毓信在一篇题为《略论数学真理及真理性程度》的文章（《自然辩证法研究》1988年1第期）中对数学模式的客观性作过一般性分析。主要论点为：

第一，合理的数学模式应该是一种具有真实背景的抽象物，而且完成模式的抽象过程理应遵循科学抽象的法则（这里所说的抽象未必是建立在原型之上的直接抽象，也可以是较为间接的或多层次的抽象），因此必须首先肯定数学模式在内容上的客观性。

第二，数学模式是创造性思维的产物（有时甚至包含很高的构造技巧），它们一旦得到明确的构造，即可获得相对独立性，从而人们就只能客观地对它们加以运用和研究。这就如同奕棋一样，规则既定，棋手们就必须严格遵循，而“棋谱”也就成为客观研究的对象。从组合数学的观点看，完全人为的“棋谱”也可成为组合分析的有趣题材。

上述第二点不仅说明了数学模式“形式上的客观性”，而且指出即使是纯心智的构造物也可成为数学研究的客观对象。

可见，在数学的创建过程中发明与发现是交互为用的。着眼于数学模式的创建技巧，可称之为发明，着眼于模式的客观性以及对客观关系的揭示，则称之为发现。例如，通常人们说牛顿和

莱布尼兹发现了微积分基本原理，这是不错的，因为基本原理本来是客观存在的一种关系结构，但是也可以说，牛顿和布莱尼兹发明了微积分，因为他们所引进的一系列运算符号和算法技巧又带有人为制作的性质。

一般说来，运用智慧去创造模式可称之为创造和发明，揭示客观关系则称为发现。但在数学中，模式往往反映客观关系，所以按照柏拉图主义者的说法，数学模式模式将创造出来的称之为发现亦无不可。

## 庞加莱的发明心理学

数学发现与发明的思维规律，属于数学创造心理学的范畴。法国数学家庞加莱和阿达玛，总结了近 100 年的数学创造活动，为“数学领域的发明心理学”奠定了初步基础。

按照他们的观点，无论是数学还是物理学，其发明或发现的方法都是相似的。所谓发现或发明无非是一种“选择”。正象物理学家选择“可发现定律之事实”乃是获得各项发现的关键那样，蔽学的创造发明是在数学事物无穷无尽的组合之中选择最有用的，组合抛弃无用的组合。

储备有一定数学知识的人都或多或少地有着一种关于“数学秩序”的直觉，即关于数学事物关系和谐性的直觉。这种直觉决定了可导致发明的选择能力。

阿达玛在《数学领域的发明心理学》一书中，详尽论述了数学直觉的心理要素，指出数学直觉的本质就是某种“美感”或“美的意识”。其实，这就是对于数学事物间存在着的某种隐蔽的、和谐的、简单的关系与秩序的直觉意识。

由数学直觉导致“最佳选择”的心智活动形式为“顿悟”，而顿悟产生之前往往存在一个未被清楚认识到的“无意识过程”。该过程受“美的意识”的支配，它是酝酿选择的契机。所以，无意识活动或大脑的不自觉工作，常能导致顿悟的出现。

但是，如果事先没有自觉的工作和有意识的努力，大脑机器没有经过充分发动，或者经历了一个或长或短的“脑风暴”阶段，那么也不大可能导致酝酿顿悟的无意识过程。庞加莱曾在《论数学创造》一文中介绍了他发现福克斯函数类的亲身经历，阐明了上述创造规律。事实上，凡从事过数学创造性研究工作的人都或多或少地会有上述类似经验。

无意识活动能产生顿悟或灵感的经验，早就为文学艺术家所体验到了。例如，中国宋代大文豪欧阳修曾有过所谓“三上文章”的经验，即他的一些杰作的构思大多产生于厕上、马上和枕上。

为什么无意识活动过程能产生出有用的顿悟（即观念组合的最优选择）呢？虽然现代创造心理学家非常重视庞卡莱的“无意识活动”理论，但迄今未能彻底揭示出“顿悟”产生过程的全部心理活动机制。一般认为，在心智活动的无意识境界，人脑所具有的那种关于事物关系和谐性的美感（审美意识）能力，可免除任何定向思维所带来的条条框框的束缚，因而能够最自由地、从容不迫地去帮助大脑作出最优选择，这就导致了顿悟的产生。

可见，庞加莱—阿达玛关于数学创造思维的学说，相当深入地阐明了自觉工作与不自觉工作、有意识努力与无意识活动之间的辩证关系。

## 数学创造的一般心智过程

庞加莱曾说过，只有靠有意识的工作才可能驱使原来挂在墙上的“观念原子”飞舞起来，并通过它们之间的自由而有选择的结合，产生出新思想和有用概念。

现代创造心理学认为，脑风暴是一种在脑海中迅猛涌现出种种联想、猜想、想象和非逻辑思维（包括直觉推断等）的心智活动形态，这类思维活动形态又称为发散思维。有成效的脑风暴，

必须联系着一个明确的目标，如要求解决某个数学问题或希望获得某种数学发现等。一般说来，脑风暴的目的性越强，发散思维的联系中心就越明确，从而有利于问题的迅速解决。

通常，在脑风暴的初始阶段，往往只能产生出一些平凡的思想、观念及其组合，它们并不能帮助解决问题。因此，有必要使脑风暴持续下去，比方说持续一两个小时，在最后半小时内，便可能出现廖廖无几的或极为罕见的思想或观念。这是一种不同于顿悟的“渐悟”。

无论渐悟或顿悟，通常只是帮助研究工作者获得合理的设想或正确的预见的思路。要实现设想和实证预见，往往还须继续进行有意识的甚至是十分艰巨的工作。

以上所述乃是一般科学创造的心智过程。就数学领域的创造活动而言，发散思维有其特定的内容。例如，数学上的种种形象思维、几何空间结构的直观现象、几何与分析之间的类比联想、从有限到无限的形式模拟、代数结构之间的关系猜测、数学探索中的合情推理（又称似真推理）等等，均在此范畴之列。

不过，要确立一个数学成果或真正解决一个数学问题，还必须进行认真的论证或验证工作，这就需要一丝不苟的逻辑分析思维，即心理学上所说的收敛思维。

今天，电子计算机已成为数学研究的重要助手，它改变了数学创造性研究活动仅依靠人脑进行非逻辑思维与逻辑思维的传统方式。事实上，借助于现代计算机的“科学计算”手段，可大规模地系统地进行数值实验，用于发现规律，检验思路，显示合理的方案和猜想，这大大扩展了人脑所能执行的发散思维的领域。此外，科学计算还可完成人力所不能办到的最终的论证工作，如“四色定理”的证明。

可以认为，数学上的创造或发明往往开始于不严格的发散思维，继之以严格的逻辑分析思维即收敛思维。而以计算机为工具的现代科学计算，则能够帮助数学工作者大大扩展数学创造中所

需要的发散思维与收敛思维两方面的能力。

实际上，数学创造的心智活动过程是异常复杂的。限于篇幅，本文不能通过剖析实例来加以详细说明了。

## 关于数学抽象的几个基本法则

既然数学的研究对象主要是“量化模式”，而模式又是抽象物，所以数学研究往往离不开抽象思维。本文不准备从心理学角度来考察数学抽象思维的活动规律，而是从数学模式本身的客观要求来讨论数学抽象过程的普遍法则。

在《数学抽象度概念与抽象度分析法》一文（《数学研究与评论》1985 年第 2 期）中，笔者与张洪庆曾把“弱抽象”与“强抽象”的两种基本过程表述为两条抽象思维的基本法则，并讨论了它们的一系列例子。后来，我们又考察了现代分析数学、几何学与拓扑学以及抽象代数学的一些分支，再加上数学基础问题的某些研究领域，觉察到近、现代数学家们除了到处运用弱抽象与强抽象的思维法则之外，还在不同的具体场合巧妙地利用了其他三条抽象思维法则。这样，至少可以列举出五条关于数学抽象过程的具有普遍意义的基本法则：第一，特征分离概括化法则；第二，关系定性特征化法则；第三，新元添加完备化法则；第四，结构关联对偶化法则；第五，公理更新和谐化法则。特需指出，上述这些法则或原则并不是任何个人的发明或创造，而是思维反映数学模式客体所必须遵循的客观规律。

第一法则简称“特征概括原则”，是数学工作者引进一般性概念、拓广已有数学模式时常用的抽象法则。例如，使用此原则引进抽象的“距离空间”概念时，要先将欧氏空间中的距离特征（非负性、对称性、三角不等式等）抽调出来，用形式化的数学语言表述为公理，再把符合距离公理的全体元素（集合）规定为一个普遍范畴，即名之为距离空间。这须用到经典集合论中的“

概括原则”。事实上，抽象代数、泛函分析与拓扑学中的许多数学结构以及各种抽象系统、抽象空间和某些普遍关系属性等概念，都是运用特征概括原则得出来的。

第二法则是关于强化结构的法则。它的运用包括两个步骤：首先，在一个系统的对象（元素）之间引进某种新的关系（如某种映射、对应关系或运算法则等），从而在新形成的关系结构中把某种新出现的性质作为特征予以规定下来，然后，利用概括原则把它规定为一个普遍范畴或某种普遍属性，当然，还可把具备此种属性的元素全体定义为一个类。例如，代数系统的同态与同构、拓扑的同胚、置换群的正规子群与商群、康托尔的超穷基数与序数及其运算法则、数理逻辑中的哥德尔序数以及函数的可微性与可积性等属性概念的界定，都是上述“关系定性特征化法则”的具体应用。

为什么第二法则可称为强化结构的法则呢？举例来说，函数的连续性是函数的一种结构属性，如果对连续函数引进差商的极限运算，则能在极限存在的情况下进一步获得“可微性”，由此便可引出“可微性”的一般概念，而可微性当然是比连续性更强的一种结构属性。

相比之下，后三个基本法则就显得较为特殊一些，但它们的应用范围仍然很广。

由于数学的结构系统往往和运算相联系，因而必然会产生运算能否在原结构系统上畅行无阻的问题。例如，在有理数系统上引进极限运算后，马上就会出现极限是否总存在的问题，于是必须把无理数作为新元素补充到原结构中去，才能使之成为具有完备性的实数系统。把这种思想方法提高成为一般法则，就称之为“新元添加完备化法则”，即第三法则。在实变函数理论中，象勒贝格可积函数与平方可积函数概念的引入，使得 $L_1$ 与 $L_2$ 均成为完备空间，也是第三法则的应用实例。事实上，在现代泛函分析、拓扑学、广义函数论及偏微分方程理论等领域中，到处都

会发现第三法则的妙用。

一般说来，用好第三法则的关键是要恰当地规定“新元素”的概念。新元素往往要依靠原结构系统中元素集合的某种“等价类”来获得恰当的定义，而其中集合类的“等价条件”要由相应的运算来规定。结合现代数学中的具体例子，就不难理解这里所给出的一般性提示。

第四法则也是数学研究中常用的，最简单的例子莫过于欧氏几何学中的“对偶原理”。在平面几何中，人们发现由点、线等关系结构形成的几何命题或定理，若将点线互换，并把诸种几何关系换成相应的对偶关系，所得到的新命题或新定理仍然成立。这样，几何中的每条定理及其对偶定理只须证明其一就够了。另如，在泛函分析中为研究一个函数空间的结构往往转而研究其对偶空间或共轭空间，在博奕论中研究对偶策略，在数学规划论中考虑对偶规划，以及在积分变换与数列变换中研究互逆变换等等，都是把一对数学结构按对偶化法则关联起来，以便于更好地解决问题。

要发现一个数学结构（或关系模式）的对偶结构，需具有分析性的抽象思维和一定的洞察力。通常，类比联想的思考方法会在这里起到助手作用。

第五法则是一个利用更换基本公设或公理以排除数学悖论的重要法则，它也适用于处理物理科学中的悖论问题。举例来说，绝对时空观与“光行距”实验结果的矛盾曾导致物理学产生著名悖论，但爱因斯坦提出“在任何体系中光速不变”这条新的基本假设（即狭义相对论的基本公理，认为任何运动系统中的“光行距”是度量时间长短的唯一准则）后，便否定了绝对时空观，从而立即消除了上述悖论。

数学上有一个古老的伽利略悖论，意思是说自然数和一切平方数可一一对应起来，因而可以认为，平方数集合和自然数集合具有同样多的成元，即它们是同样大的集合，但前者又明明是后

者的真子集，于是这就和“部分小于整体”的公理发生了矛盾。康托尔和戴得金解决这个悖论的方法是，把元素间的“一一对应”作为无穷或有穷集合之间彼此“等价”的基本准则（即基本公理），从而可以不承认“部分小于整体”的特殊公理对无穷集合也适用。这样，悖论就被排除掉了。

在微积分的早期发展史上，曾有过著名的贝克莱悖论。它是针对牛顿的“流数术”（求微商步骤）提出的质难。这个命题又称为“无穷小悖论”，其实质是否定了牛顿求“终极比”的形式计算的合理性。消除贝克莱悖论的方法，是用过程模式代替代数模式，也就是必须要用“极限算法的模式”去取代“代数形式演算的模式”。前者用到“变量”的新概念，后者只用到传统的常量概念，而承认变量概念便是一条新的公理。再如，现代的公理化集合论之所以能排除经典集合论中的熟知悖论，就是使用新公理替代康托尔的“造集原则”的缘故。而非欧几何学的创立，更是精心应用第五法则的著名例子。

量子力学创始人之一海森堡曾说过，当物理学中出现悖论时，就应该将悖论所包含的新思想提炼成公理吸收到原来的理论系统中去，这样，便可获得扩展了的物理学理论。事实上，无论是海森堡“测不准原理”的建立或是爱因斯坦“狭义相对论”的创立，都是天才地运用了第五法则的光辉范例。

运用第五法则去创建新理论的关键，是要去发现不平凡的新公理。但要做到这一点，就必须面对“悖论”的挑战。如果害怕悖论或者只是设法去躲避悖论，那将会一事无成。所以，数学和物理学上的伟大创造和发明，不仅依靠人们的智慧，而且也有赖于人们的气质。

---

本文原载《百科知识》1989年第3期，收入本书时作了文字上的校订。

# 欧·拉·的·方·法



# 精·神·与·风·格

欧拉的名字是大家熟悉的。我们从初等几何、代数、三角直到近代高等数学与力学各学科，几乎到处可以见到以欧拉命名的定理、公式、函数、方程及解法等等。

欧拉 28 岁时右眼失明，到 59 岁时双目完全失明。这样，他又度过了艰苦的 17 年，但是他丝毫没有停止工作。在这最后的 17 年里他还通过口述，著作了大约 400 篇论文和几本教科书。据历史记载，他在任何不安静的环境里也能专心工作，甚至在他临终前几分钟还在进行计算，可见欧拉所以能做出那样多的贡献并不是偶然的，这正是与他的坚强意志和苦干精神分不开的。

"读读欧拉，他是我们大家的老师"，这是比欧拉晚一代的杰出数学家拉普拉斯当年向年青人发自内心的劝告。确实，从欧拉著作中人们可以学到许多东西。而最宝贵的就是欧拉那种从事发现创造的思想方法。

我们知道，自从微积分发明以后，18至19世纪是数学发展异常迅猛的时代，那个时代的数学家特别重视发现和创新，而往往把精细论

证或证明作为发现新结果后的“补行手续”。就连精于严格证明的高斯也不例外，例如他曾说过，他在数论上的许多结果是先经发现而后补证的，其中有些结果是当初猜想出来的。

但发现和创新往往离不开归纳法、类比法和计算实验。欧拉就是一个最善于归纳、类比和计算去发现数学真理的杰出典型，所以我认为如果国内能出版一、两本引人入胜的“欧拉小传”，给年青人讲讲欧拉的思想方法，则对于培养数学创造性能力来说应该是大有益处的。

所谓“归纳法”就是从特殊例子中总结出一般规律的方法；“类比法”就是根据事物（包括数量关系与空间形式）的某些相似性去作出由此及彼的推断方法。自然，这些方法都离不开观察分析和实验。所以欧拉曾说过：“数学这门科学也需要观察和实验”（言外之意是说数学真理的发现过程和物理学定律的发现过程是相似的）。

试回忆一下立体几何学中多面体的欧拉定理，也即形如

$$F\ (\text{面数})\ +V\ (\text{顶数})\ -E\ (\text{棱数})\ =2$$

的著名公式，可以想见，当初欧拉就是从一批特殊的凸多面体的观察分析中归纳出来的。今天我们不妨也来作个试验，把一批不同的多面体放在大家面前，让大家通过观察把各种多面体的面数($F$)、顶数($V$)、棱数($E$)一一记录下来，然后试着从记录表中的数据去猜想 $F$、$V$、$E$ 之间的数量关系——简单的线性关系。毫无疑问，通过归纳总结，不少同学也会很快发现上述欧拉定理的。

还有一个特别有趣的例子是，欧拉大胆使用“类比法”竟发现了正弦函数的因子分解式

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

这便是关于 $\sin x$ 的著名的欧拉乘积公式。从上述公式可以看出，

当 $x=0$，$x=\pm\pi$，$x=\pm 2\pi$，$x=\pm 3\pi$，… 时，乘积取零值，而 $x$ 取的这些数值正好都是函数 $\sin x$ 的零点。所以欧拉发现上述乘积公式的基本思想就是把 $\sin x$ 的熟知展开式

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

看成为"无限次的多项式"，然后仿照多项式按零点分解成因子乘积的方式把 $\sin x$ 分解成因式乘积的。

显然，将上述乘积展开出来所得到的最低次项，正好和级数展开式中的最低次 "$x$" 项是一致的（这也说明乘积表示式是合理的）。如果进一步观察乘积展开式中所含 "$-x^3$" 的系数，并和级数展开式中 "$-x^3$" 项的系数相比较，则应该对应相等，故得出

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3!}.$$

由此即导出自然数平方的倒数级数和

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

这正好解决了欧拉诞生前原由伯努利提出的级数求和难题。

不要误认为欧拉是一个只会发现而不会精确论证的数学家。事实上，只要看一看他是如何把著名的"哥尼斯堡七桥问题"通过抽象分析思考化归为"一笔画问题"，然后证明其不可能性的过程，即可了解欧拉的分析论证能力也是十分出色的（七桥问题在每一本"图论"教科书中都有介绍，这里就不多说了）。

据统计，欧拉留给后人的丰富的科学遗产中，分析、代数、数论占 40%；；物理和力学占 28%；；几何学占 18%；；天文占 11%；；弹道学与航海科学等占 3%。由此看来，欧拉不仅具有献身于数学科学的奋斗精神，而且还有着强烈的联系实际应用的精神，否则他就不可能在力学、物理与天文学等领域中也有那样多的贡献。

根数学史记载，比欧拉晚一辈的数学家拉格朗日从 19 岁起曾和欧拉通信，讨论等周问题的普遍解法，这导致变分法的诞生，等周问题原是欧拉思索多年的问题，拉格朗日的解法博得了欧拉的热烈赞扬。当年欧拉曾特别谦恭地压下自己在这方面较不成熟的作品暂不发表，而促使年青的拉格朗日的工作得以及早发表和流传，赢得很大声誉。后来，过了几年欧拉还热诚地把年青的拉格朗日推荐给普鲁士王腓特烈大帝去继任柏林科学院物理数学所所长。这些史实说明，欧拉不仅具有高尚的科学道德和风格，并且对提拔年青学者也毫无保守思想。

尽管欧拉是属于两个世纪前的数学家，但是他的富于成果的治学方法，至死不倦的工作精神和纯洁高尚的道德风格，却是值得永远为后人追念的。



本文原载《数理化生园地》1985 年第 1 期，收入本书时作了文字上的校订。

# 略论科学计算在理论研究中的作用

## 一

自 80 年代以来，“科学计算”（*Scientific computing*）的意义和重要性已日益引起人们的重视和关心了。如所知，1983 年美国以 *P*·*D*·拉克斯为首的一个专家组就曾向美国政府提出报告，强调了科学计算是关系到国家安全、经济发展和科技进步的关键性环节，是事关国家命运的大事。

1989 年 4 月政府批评了得克萨斯州教育部门在中小学数学课的教学中忽视了计算能力的培养。在这以前有关组织调查了英国、加拿大和美国的一些州的中小学数学教学，抽查了数以万计的中小学生，发现美国学生的计算能力远远不如英国、加拿大的学生。发现被抽查的得克萨斯州，未经由专家参加的委员会的同意，就在全州试用新教材，而新教材恰恰忽视了数学课中对中小学生计算能力的培养。

冯康、周毓麟等几位同志于 1987 年 4 月间在京举行的中国计算数学会理事会上的报告中曾指出，科学计算的内容涵义是极为丰富

的；科学计算主要是处理现代科技与工程中的大规模、非线性、非均匀性和几何非规则性的巨型问题（包括数学方程组、特别是偏微分方程组的数值求解问题）。

科学计算可以理解为整套过程，即从给定的科技问题（计算任务）出发，进行分析研究，建立数学模型，研究计算方法，直到配置算法程序，利用现代计算机执行计算任务，最终检验实际效果。如果结果不合要求，还须进行反复，重新回到修改数学模型、设计新的计算方案等过程。所以，科学计算应是数学理论分析与计算艺术的高度结合，特别要和计算机的灵活使用相配合。

最近，在《美国数学的现在和未来》（*Renewing U. S. Mathematics*, 1984）一书中，还指出了科学计算的发展，已导致应用数学和物理科学中的一些分支正在经历着一场革命性变化。

# 二

这里，值得指出的是，即使在数学理论研究中，科学计算也已开始扮演前所未有的紧要角色。事实上，当代数学家面对着束手无策的困难的理论课题时，也往往求助于科学计算。最著名的例子莫过于 1976 年阿培尔和哈根通过科学计算（在电子计算机上化费多 1200 个机时），终于在所有平面图的可约构形中找出了一个“不可免的完备集”，从而证明了四色问题的猜想，即四色定理。

此外，还有两个特别引人注目的事例我想是值得介绍的：一是关于证明毕勃巴赫猜想的曲折过程，二是现代实验数论的兴起和有人试图否决黎曼假设（简记 *RH*）的雄心壮志。

著名的毕勃巴赫猜想，是一个关于单位圆域内的单叶函数 $f(Z)=Z+\sum_{n\geq 2}a_nZ_n$ 的系数满足不等式 $|a_n|\leqslant n(n=2,3,\cdots)$

的猜测性命题。多少年来人们为了寻求这个命题的证明已经耗费了大量心血，而直到 1984 年 2 月低才发现了这一命题的正确证明。现今人们称它为勃伦杰斯定理。

美国数学家勃伦杰斯从事上述猜想的论证已有多年而且发表过错误的论文，以致有些同行们曾对他失去了信任。不管怎样挫折，他运用泛函方法，终于把毕勃巴赫猜想（命题）合理地归结为某一个雅可比多项式积分恒取正值的断言，即断言：

$$\int_0^1 {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ n+a+2,\\ (a+3)/2,\end{matrix}\ st\right)s^{(a-1)/2}(1-s)^{(a-1)/2}\,ds>0,\quad (*)$$

此处$a>-1$，$0>t>1$，，而${}_2F_1$为超几何函数，它可以表示成雅可比多项式。换言之，只要证明不等式（*）对一切 $n\geqslant 2$ 都成立，则毕勃巴赫猜想便成立了。

勃伦杰斯自已曾努力试证过（*）而未能成功。没有法子他只好去找他的同事高歇请求帮助。高歇是位杰出的数值分析家，他听懂了勃伦杰斯解释的思路后认为是很有道理的。于是很快运用科学计算技巧，建立合理的计算方案和算法程序，并立即使用计算机对（*）进行数值验证，一直验证到 $n\geqslant 40$ 时都成立。这就大大增强了勃伦杰斯的信念，而且所得结果是十分令人鼓舞的，因为这已经大大超过人们关于 n＝2，3，4，5，6，7，8 等逐个加以证明$|a_n|\leqslant n$ 的历史记录了。然而，如何对一切 $n\geqslant 2$ 去证明（*）仍然是勃伦杰斯和高歇面临的一大难题。

1984 年 2 月 29 日高歇忽然想到给特殊函数论名家阿斯基挂一个电话。当时在电话交谈中阿斯基曾断然表示否定态度，说什么："我不相信那是可能的。""复分析中的精确不等式（指（$|a_n|\leqslant n$）怎么能用实分析中的工具去证明呢？"但是，高歇还是耐心地说服了他，要他研究一下形如（*）的不等式究竟能否成立。

当天晚上，高歇喜出望外地接到了阿斯基的一个令人兴奋的

电话答复："您所说的那个勃伦杰斯猜想（*），并不是猜想（*）而是一个定理呢！"事实上，那是阿斯基与格斯贝 1976 年合作一文中某定理的特款。（参看 Amer. J. Math., 98 (1976), 709—737)

第二天清晨当高歇在校园里碰见勃伦杰斯时便立即转告了上述好消息。勃伦杰斯当即欢呼说："这样，毕勃巴赫的猜想便证明成功了。"接着，1985年北欧的 Acta 杂志上便公布了勃伦杰斯著名论文。"Proof of the Bieberbach Conjecture"。显然，这是国际函数论界的一件大事。

## 三

再谈一点"实验数论"的兴起。如所熟知，费马曾猜想过整数 $F_n=2^{2^n}+1$ (n= 1，2，3，…) 都是素数。事隔多年后欧拉却找出了反例：$F_5=2^{32}+1=4194967297=641\times6700417$。今天，每一个高小或初中学生使用有 10 位数字的袖珍计算器便能立即实明 641 确实是 $F_5$ 的素因子。现今人们完全可以想象：假如费马当年也已经有了计算器，并且手头有一张 1000 以内的素数表，则只须略作数值实验，便不致于提出上述错误猜想了。

近、现代的实验数论是由莱姆尔和梵迪弗等人开始的。后继者的研究成果甚多。例如，借用科学计算塞尔夫列捷等人曾系统地搜索了各种"同幂等和问题"的最小解。近年来美国的亚利桑那大学还有一个数论小组，专门研究如何运用计算机程序计算技巧去探索数论中的许多问题。特别是由于大整数的素因子分解问题和现代密码研究（例如"公开密钥方法"研究）有关，而这又必须借助于现代计算技术，所以愈来愈多的数论专家乃至代数学家，都逐步变成精通科学计算的专家了。

最令人瞩目的是一位数年前曾来过中国的瓦尔伽。近年来他曾借助于科学计算，成功地处理了苏联已故学数家伯恩斯坦遗留

下来的几个不甚知名的猜想。他还有一个雄心勃勃的计划，即希望通过大规模科学计算去否定黎曼假设（简记 $RH$）——关于“$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$的非平凡零点均为实数”的猜想。大家知道，英国已故分析学大师利特伍德曾于生前表述过他在直觉上倾向于否定 $RH$ 的见解。所以瓦尔伽的信念是与利特伍德一致的。他曾公开扬言：“如果 $RH$ 确实是错的”则他将有机会获得成功，即成功地验明该假设为假。”但如果 $RH$ 是对的，则今后他的全部努力将会前功尽弃。当然，$PH$ 究竟是对还是错，人们只好试目以待。不管怎样，理论研究中不断深入地依靠着科学计算，其结果不仅对理论建树有益，而且也有利于推进科学计算本身的发展。

综上所述，可以想见现代科学计算对理论研究的作用至少有如下几点：〔1〕针对问题需要，系统地提供数据，可以供归纳、分析之用。这样就有利于发现新现象、新规律。（2）可以帮助检验猜想，包括检验思路和设想，以便发现差错，少走弯路。（3）帮助确证科研方案（或理想计划），使人增强信念，有利于最后导致成功，勃伦杰斯的成功就是很好的例子。

## 参 考 文 献


〔1〕冯 康，科学与工程计算的发展与展望，1987 年中国计算数学会理事会上的报告。

〔2〕1周仲良，郭镜明译，美国数学的现在和未来，复旦大学出版社，1986

〔3〕R. Askey, Positive Quadrature Methods and Positive Polynomial Sums, Approximation Theory V (Texas, U、S、A、) 1986, P、16—21.

〔4〕刘彦佩，关于四色问题的传说，运筹通讯，第 14 期 1986 年9月。



本文原载中国数学会计算数学学会，北京计算数学学会编《计算数学通讯》1987年第2期，收入本书时作了文字上的校订和补充。

# 数学方法论与数学教学改革

自 1981 年以来，笔者曾在大连、长春、武汉的三所高等院校讲授过数学方法论课程，并曾在其它一些城市作过方法论的多次讲演。1983年还由华中工学院出版社出版了拙著《数学方法论选讲》一书，发现不少数学教师和哲学工作者对所述及的题材内容都很感兴趣。有些读者还在来信中提到方法论对培养师资和改革教学方法的重要性。这就引起笔者撰写本文的动机。本文打算从数学方法论角度来探讨数学教学改革的有关问题。但提出的观点和建议未必正确合用，仅供有兴趣的读者参考、讨论而已。

一般都认为，作为科学方法论重要分支的数学方法论，主要是研究数学发展规律、数学结构的思想方法以及数学的发现、发明与创新等法则的一门学问，显然它与数学教育与教学法研究有着不可分割的联系，所以它能引起数学教师们的普遍关注，也是理所当然的事了。

多少年来，无论是中学数学教材还是大学数学各门课程的教材，都是毫无例外地把数学知识力求组织成演绎结构系统来进行教学。这

有历史的必然性。因为随着人类文化的发展，数学科学知识的庞大积累，必须经过筛选和提锻，把最重要最精华的题材，用演绎法串联起来，才能最有效地传授给后代。人类的知识发展过程总带有历史阶段性和逻辑演绎性，所以数学教材的编选，常常要反映历史发展的顺序和演绎推理的要求，这应该是众所公认的准则。

但是，如果要培养具有数学想象力和创造力的青年一年，要使他们不仅能够灵活地运用数学工具，而且还可能日后在科技上有所创新和发明，那么在教材教法中只注重传授演绎性数学知识，过分强调逻辑演绎推理的训练，将是不利于达到上述目标的 。

从方法论角度来看，数学真理知识的发现、发掘和推陈出新，离不开对特殊实例的观察、分析、归纳、抽象概括和运用探索性推理等过程。所以，重要的事情是要教会学生运用科学归纳法，能从特殊例子中去发现出一般性的东西来（例如，从一批特殊结构关系中观察出某种一般性结构或一般数量关系等等）。大家知道，18、19 世纪的杰出数学家欧拉和高斯等人都是运用归纳法的大师，他们所获得的许多公式和定理，都是靠归纳法发现的。

归纳法和类比法常常被认为是发现数学真理的重要方法，前者是从特殊过渡到一般的思想方法，后者是由彼及此的联想方法。只需略略浏览中外数学史，即可发现许多有深远意义的极为重要的数学知识都是通过归纳法与类比法发掘出来的。这方面的题材和例子真是举不胜举。因此在中学和大专学校的数学教材中理应有归纳法与类比法教材的适当位置。

归纳和类比离不开观察、分析和联想。因此，在数学教学中如果适当加进这方面的有趣题材，则对培养数学的观察力、分析能力和联想能力也是极有帮助的。值得欢迎的是，美籍匈牙利数学家兼教育家乔治·波利亚的名著《数学的发现》、《数学中的

归纳与类比》、《数学中的合情推理》（后两书的中译本起名为《数学与猜想》）已陆续译为中文出版发行。这些书包含有大量的有趣题材和富于启发性的例子，相信对国内关心数学教学改革的同志们会有一定的参考价值。

波利亚所说的“合情推理”（也称似真推理），实际上类似于爱因斯坦所倡导的“探索性演绎法”，这种演绎法至少在两点上不同于一般形式逻辑范围内的演绎法：一是作为推理出发点的前提或条件多半是不够充分的，或者是比较模糊的；二是推理的前提或假设往往是一种不稳定的猜测。在推理过程中经常处于可更改的地位。例如，凭直观猜到某命题的一部分必要条件或者可信以为真的条件，用以形象的直观地（由猜想的外推）去“推断”出某种结论来，这便属于第一种情形。在推理过程中发现作为假设的前提不尽正确而需要随时加以修改补充的作法即属于第二种情形。事实上，许多有创造力的数学工作者，正是惯用这种探索性演绎法去发现和建立他们的定理和理论成果的。通常在数学的解题和证题过程中，人们也常常不自觉地试用着探索性演绎法，只是运用这种演绎法的技巧和能力水平各不相同而已。因此有关这种演绎法的题材也应该在教学与教材中占据一定的重要位置。举例来说，数学中需要讲述一些引人入胜的“反例”，要揭示“反例”是怎样发现出来的，不正是阐明“探索性演绎法”的一种简单应用吗？

综上所述，归纳、类比和探索法通常是靠猜想与联想（包括直观想象）等心智活动串联起来的。这些心智活动形式能导致人们作出新的判断和预见，能帮助发现数学真理，包括发现新的数学关系结构、新的数学方法及数学命题等等。但是，它们毕竟是一种非逻辑的思维形式，属于现代心理学上所谓的的“发散思维”范畴，当然，并不能用以精确地建立数学命题和理论。最后要证明命题或定理，还必须用严格的逻辑分析与演绎推理，即收敛思维。

因此，为了培养即有创造发明能力，又有逻辑论证能力的数学师资和学生，应该在中学和大专院校的数学教学教材中，采用“归纳与演绎交互为用的原则”。按照这条原则，不仅应该教学生学会运用科学归纳法试着去猜结论、猜条件、猜定理、猜证法，而且还要让他们学会从探索性演绎法过渡到纯形式的演绎法，能够把预见到的合理命题或定理的证明一丝不苟地建立在逻辑演绎基础上。

总而言之，在数学教学过程中，既要发展学生的发散思维能力，又要培训他们的收敛思维能力。既要教会学生进行严格逻辑推理，还要教会学生大胆进行不严格的猜想、联想和合情推理。

传统的数学教育与教学似乎过份偏重于培养收敛思维能力，这对造就面向未来的科技人才来说，自然是不够理想的。因此我们认为“归纳与演绎并用”的原则在数学教学改革中应该是一条值得重视的原则。

但是，又须把话说回来，数学往往以其特有的逻辑严密性而骄傲，数学教师们又往往以讲述为本职。因此，正象波利亚在《数学与猜想》一书中所指出的，一般教师都不愿向学生讲述“不严格的思想方法”（如猜想与合情推理等），以免有损于“威信”。而且，从归纳到演绎，首先需要观察分析诸特例，作起来有时是很费工夫的，毕竟不象专讲逻辑演绎那样简便而直接。因此，如何恰当地使“归纳演绎并用的原则”体现到数学教改中去，看来还有些思想认识问题是需要讨论解决的呢。

青少年从小学、中学到大学，都要把许多时间花在数学学习上，但当他们进入社会从事各行各业的工作后，其中就有一个相当比例的人数，再也用不着或者很少运用他们学过的数学知识，其中还有些人甚至对数学产生了“那是枯燥无味，太伤脑筋的玩意儿的”错觉。尤其是，一些具有艺术爱好倾向的学生，往往更容易产生上述错觉，有的人还对数学怀有敬而远之的惧怕心理。

其实，上述情况可能是由于数学教育与教学中一贯忽视“美

学原则”所导致的必然现象。作为科学语言的数学，具有一般语言文学与艺术所共有的特点，既数学在其内容结构上和方法上也都具有自身的某种美，即所谓数学美。“数学美”的含义是丰富的，如数学概念的简单性、统一性，结构系统的协调性、对称性，数学命题与数学模型的概括性、典型性与普遍性，还有数学中的奇异性等等都是数学美的具体内容。不仅在高等数学中，而且在初等数学中也处处存在这些数学美。例如，仅就“对称性”而言，已故数学家外以耳就写过一本讨论这种数学美的著作，令人读之兴味盎然。

谈到数学理论（结构或模型）的典型性，其思想方法实际上和文学创作中的典型性概念是很相似的。文学小说和艺术需要以具体背景素材为基础，采用扬弃法或抽象法塑造出某种来自生活而又高于生活的形象典型。数学理论，其实也是以一些具体问题、具体材料为背景，通过归纳、分析、抽象等一系列过程建立起来的模型结构或关系典型。当然，一切抽象物都有一个共同特征：它们来自实际、反映实际，而又往往超出实际（所谓“超出实际”，并不是说脱离实际，而是把一切有着可能性的对象也包括进去的意思，数学的抽象物具有逻辑演绎性，或许这是不同于艺术的主要之点）。

因此，按照上述类比，完全可以教懂即使是具有艺术爱好倾向的学生们，使他们也能领会到“数学美”。

数学教育与数学的目的之一，应当让学生们获得对数学美的审美能力，从而既有利于激发他们对数学科学的爱好，也有助于增长他们的创造发明能力。例如，在拙著的第十讲中，笔者曾介绍了庞卡莱和阿达玛的“数学领域的发明心理学”姑且不论他们的观点是否完全正确，但他们一致强调了的“美的直觉”在数学创造发明中的作用却是大多数数学工作者所共有的经验。事实上，马克思也曾说过，人类社会的生产活动是按照“美学原则”进行的当然。，作为精神生产物的数学知识之符合美学原则（或审

美原则）也是无可怀疑的。

因此，我和数学界的许多同行都有同样的看法，即认为数学教改中还应把“数学中的审美原则”尽可能体现到数学教材与教法中去。

为了在我国培养大批有创造才能的学生，高水平的数学师资的培养自然是刻不容缓的。我同意波利亚的观点，好的数学教师应保持良好的“作题胃口”，显然这种“胃口”将有利于感染学生去发展解题的兴趣和才能。此外笔者还赞成数学教师能够具有泛读数学史的兴趣，且能涉猎一些创造心理与科学方法论。这样，将有助于增长教师本身对数学科学的审美修养，从而能潜移默化地去感染学生们爱好数学。

以上只是提了些原则性观点或建议，目的仅是抛砖引玉，至于如何在具体的数学教材改革与教法改革中去反映上述原则，那还有许多实际问题需要进一步讨论研究。



---

本文又载苏州大学编《中学数学》1984年第5期，收入本书时作了文字上的校订。

# 关于数学创造规律的断想及对教改方向的建议

## 一 引子从一个猜想的证明经历谈起

1984 年，勃伦杰斯证出了毕勃巴赫猜想的消息轰动了数学界，翌年发表的论文使人们确信这个困扰了 60 多年的难题确实是被攻克了。

毕氏猜想是说，“单位圆域内的一个单叶函数当表记成以变量 Z为首项的幂级数时，第 n 项系数 $a_n$ 总是满足不等式 $|a_n| \leqslant n$”，这是何等优美而简洁的命题！不难想象，毕氏当初一定是由归纳产生直观，进而提出上述猜想的。

勃伦杰斯的艰苦努力导致他发现上述猜想（命题）可归结为某种雅可比多项式的积分不等式，但是他仍然苦于没法证明这个不等式。幸亏计算数学家高歇帮了忙，使他有机会采用阿斯基等人的一个现成的富于奇异美的结果，才终于完成了证明毕氏猜想的大业。

从毕氏猜想到勃伦杰斯的工作历程来看，想象力和审美直觉都起了重要的作用。本文就

打算从想象、美学、流与源、逻辑与历史诸方面来展开论述。

## 二 严谨与想象—谈创造性人才不可匮缺的科学浪漫主义素质

数学的严谨使许多人认识到其研究过程中更需要想象力。有趣的是，国外曾有传记作家把数学家和诗人列为一类。也许他是从两者都需要想象力和美的意识才进行这种划分的。

是的，严谨（严格）、抽象、铁一般的逻辑，这是数学中绝对需要的。但这通常是在演绎论证阶段上的特点，它是表现在数学论文和教科书内容的循序渐进上，而在提出、创立概念时，在寻找思路时，则是归纳想象、类比联想、观察猜想、思路跳跃和思维发散。正如诗人们需要发挥想象力的形象思维，需要浪漫主义素质，数学家也不例外地需要“神驰万里，思接千载”。

没有想象力，没有科学的浪漫主义，克莱因和庞加莱怎能提出否定平行公里的模型，从而证实非欧几何的独立性呢？闵可夫斯基怎么能在三维空间外加进带虚单位的时间轴，从而为他的学生爱因斯坦的相对论提供绝妙的四维时空描述呢？鲁宾逊又怎能用模型化方法建立标准分析的理论体系呢？

想象力是数学创造的心理要素之一。事实上，作为发生新知识的科学研究，其第一步是选题，这一步与想象力息息相关，研究者需要想象结果、预见研究的成败。其第二步是进入研究之中，也时时需要想象力和预见性，否则会做虚功，走弯路，乃至丧失信心，一事无成。

想象需要常规的观察猜想、类比联想，也需要非常规的标新立异，突破禁区。扎德着眼于实际需要，提出隶属度的概念定义了模糊子集，泛函分析熔分析学、代数学和几何学于一炉，离散数学与连续数学通过自然的类比关系相互吸取营养，得出许多命题，这些都是常规想象力的成果。人们引入虚数的概念，哈密顿

发明四元数，伽罗瓦建立群论从整体上研究代数方程可解性理论，这些都是非常规想象的成果。

不论常规的还是非常规的想象，都是以地面为出发点的想象。一个人自拽头发无法使自己拔出泥潭，原因是缺一个支撑点。想象力的支撑点就是知识。缺乏必要的知识，想象的头脑就缺乏用来加工的原料，联想就是贫乏的、微弱的。事实上创造的机遇总是偏爱那些有准备的头脑—训练有素、具备有效知识和想象力丰富的头脑。

传统的数学教育可以使人们训练有素，具备知识，然而想象力不足，创造力微弱。严谨而缺乏想象，这是传统教育重视知识轻视能力的必然结果。以发展能力为宗旨的当代教育应当重视想象力的培养。请回忆马克思的一句名言："想象力，这是十分强烈地促进人类发展的伟大天赋"。自然应该爱惜这一天赋，开发这一天赋，发展这一天赋。

## 三　真与美—创造活动需要美学思想

正如想象力不是文学家、艺术家的专利品，美也是数学探索中的极佳境界。通常人们只看到了数学的真的本质，忽略了真的反光——美。"真属于科学技术，美属于文学艺术"——这是一种误解，其实科学技术与文学艺术有不少共性。无论《红楼梦》中形形色色的典型描写还是鲁迅笔下的阿 Q 形象的塑造，都与一般数学模型的创造过程（即抽象表现过程）有着本质的一致：从事实题材中运用分析、抽象、概括的手段，并按着美学原则，把典型和模型用文把学语言或符号语言表现出来。由此我们就会理解为什么当柯西还是一个小孩子时，拉格朗日就诚恳地告诫其父一定要使他学好文学艺术课。

尽管拉格朗日并没有揭示出文学艺术对数学创造促进的机制，但是我们在拉格朗日的数学贡献中看到了美学的作用。约束

极值的拉格朗日乘子法对目标和约束求导上的一视同仁的表达显示出匀称、均衡、和谐的美。这种协调对称的美感在拉普拉斯以其名字命名的二阶偏 微 分 方 程上也表现了出来，它的美还表现在以简洁、凝练和统一的方式表达了许多不相同的物理规律。拉普拉斯变换的普遍反演公式以复变函数积分的形式得到原函数的形式显示出一种珍奇的、独特的美。这同非欧 几 何、δ 函 数 等等，同属一种“别有洞天”的奇异美。总之，数学中的美俯拾皆是。可以看得出，闪烁着真理之光的数学成果，要么有一种和谐美，要么有一种奇异美。这大概可以成为在数学探索中旁证其正确性的准则。同时，追求美的境界也会成为激发数学创 造 性 的 动力。马克思曾指出：“人类社会的生产活动是按着美的原则进行的。”我们认为数学的创造性活动也不例外。当然还要注意到：一般说来，真是美的，而美未必都真。所以只能把美学原则作为一个值得重视的准则。

## 四　流与源——不容忽视的创造源泉

正如想象和美感往往被忽视了一样，数学创造的源与流的关系也往往被颠倒了。例如数学的严格公理化体系，人们往往认为它似乎是不需要外在推动力的“自发展封闭体系”，似乎只要继承前人的数学成果，依靠公理就能够演绎发展下去。表面看问题容易产生误会。谁能从证明毕勃巴赫猜想的漂亮的演绎推理中想象出勃伦杰斯在求索的艰难过程中，曾求助于他人编程序上机计算呢？其实，历史上的大数学家大多是颇善于计算的，欧拉就是一个典型范例。例如，欧拉在探求伯努利所征 求 的 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$之和时，用类比推理得出其和为$\frac{\pi^2}{6}$，然而方法的不严格性促使他去做计算试验，直算到七位数字都一致，他才确信自己的发现。不

仅计算，而且“试验”观察也产生创造的源泉。当代的一些经验数论专家常利用计算机算出大量信息，归纳出猜想，再做论证。例如瓦尔伽就试图靠计算机的辅助计算去否定黎曼猜想。

不仅数学本身有这种“经验归纳”、“实验验证”的源泉，数学的发展也表明了其他学科的发展形成了数学发现的外在刺激。例如，微积分的发展与力学、天文学和物理其它分支的关系是尽人皆知的。傅里叶分析的建立应归功于傅里叶对于热传导问题的研究。现代数学有些分支尽管抽象度很高，也是从客观现实中提取了模型。一些抽象度较低的分支很容易看到客观的影响，例如运筹学中的博奕论、排队论、随机服务系统理论、存储论等，名称本身就留下了本源的印记。

通常被学生们误认为发展源泉的前人成果，其实只是数学发展的流。数学，这面以独特方式抽象映照客观世界的镜子，原象是被它反映的客观世界，推动其发展的源头活水主要来之于此。高斯与欧拉的许多发表都是从归纳、观察和猜想开始的。归纳总结，计算实验永远是数学发展的忠实助手，它们提出引起想象的信息，得到结论的资料，从而发现规律，提出猜想或结论。它们也是验证的辅助手段，或否定猜想，免走弯路，或强化想象，增进信心，有利于最后论证。我们必须让学生们清楚的看到数学上源与流的关系。

## 五　逻辑与历史——表现“知识发生过程”的教育有助于培养创造性

毕氏猜想从提出到证明的漫长曲折历史告诉我们，反映在论文上的证明只是其中一个小的演绎部分，论文还反映大部分的归纳部分。为了逻辑上的简洁，这是无可非议的。然而作为教科书就欠缺了极重要的内容。正在形成的数学是一门实验性的充满归

纳的科学，而严格表现出来的数学是一门系统的演绎科学。现在的教科书是后者。如果仅仅为了传授知识，这种演绎性的教材也是完美的。但是为了培养创造性，这种教材就不足了。这是因为学生得到的知识太片面了，他们“只见树木，不见森林”，只学到严谨，不会发挥想象；只掌握演绎，不能运用归纳；只知道流，不了解源。这样得到的知识难免枯槁僵死，没有活性。

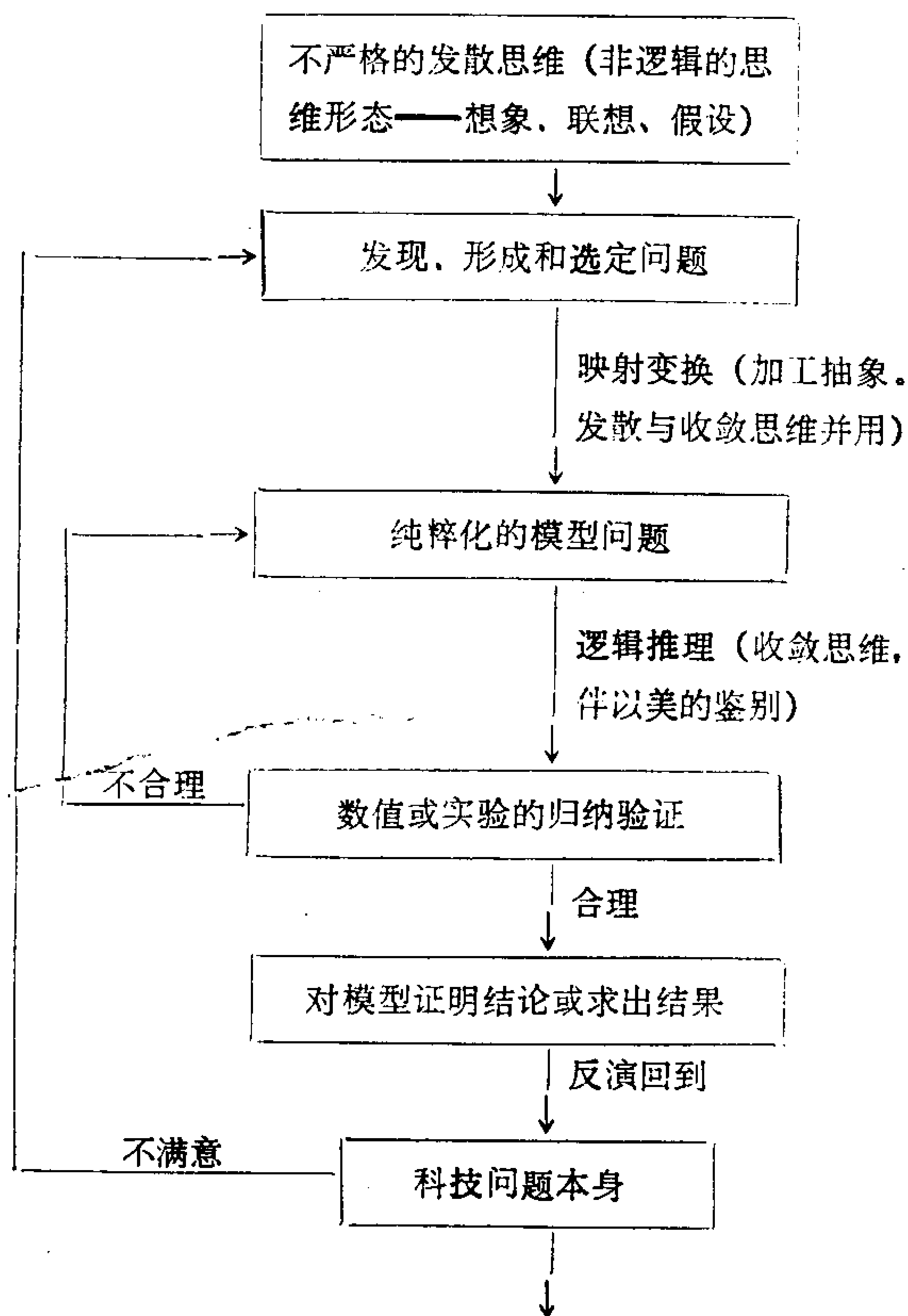
如何改造教材、改善讲授方式，以适应教育宗旨向培养能力方面过渡呢？希耳伯特的老师福克斯教授的一段轶事对我们颇有启迪。大概是由于缺乏备课习惯，福克斯在课堂上总是现想现推，有时就使自己处于被动困难的境地。然而希耳伯特和他的同学们却因此看到了高明的数学思维是怎样在艰巨的探索中进行的。设想我们今天的教师谁人这样做，必然受到“备课不认真”的谴责。然而，把课背得再流畅，搞一套毫无生气的逻辑推演，学生还是看不到生动的创造过程。如果有意识地在学生面前表演探索真理的曲折，而进行了认真的备课，那么，我们就把传统的传授知识表现出的认真备课优点，与福克斯无意中表现出来的有欠缺的创造性讲授光彩结合了起来，这样就可以闯出一条崭新的培养创造性的探索表现数学之路。

如果我们真想这样去做了，那么我们就会更加体会到莱布尼兹的一句名言：“没有什么比看到发明的源泉（过程）更重要了，比发明本身更重要”是的，我们现在的教学主要是表现发明本身，或者说表现结果和状态，而不是演化和过程。可是，后者更具有方法论上的启迪意义，可以使学生学到活生生的创造方法，有利于解决他们将来遇到的新问题。这样看，我们就会理解高斯为认“发现比论证更重要”的意义。

与这种表现“知识发生过程”的教学相呼应，有一个相应的教材问题。波利亚强调数学科学知识的二重性，即“演绎与归纳的双重性”，而现今的中外数学教材基本上是演绎性的。因此，我们应当写出具有双重性的教材来，为了更便于表明教材的宗

旨，我们称之为发现法教材。这种教材基于这样的思想：学生们要掌握演绎推理的基本技巧，但是光靠逻辑上的演绎不可能发现新事物；实验归纳加上探测性的演绎才能导致新发现；因此要加强归纳方面的内容。与发现法教材相联系的是写出另三种教材："数学方法论"、"数学发现史"和各分支的高级科普教材。这里应指出高级科普教材的意义，一有助于学生们通过深入浅出的叙述理解关键思想；二有助于各个专业的科技工作者进行知识更新，掌握数学工具。

我们顺便建议数学工作者和数学杂志不要排斥论文的归纳写法，要鼓励和提倡把演绎与归纳写法相结合。



应当指出，在数学教改中处理好历史与逻辑的关系是十分重要的。通常的看法总是强调了二者的一致性。从总体上讲，这种看法确实有点道理；然而在具体的概念和定理的形成上，逻辑与历史不是一致的，通常只保留了演绎的逻辑阶段，而忽视了归纳的逻辑阶段。

同一般较多地注意严谨、真、演绎、流和逻辑相反，我们在本文里强调了想象、美、归纳、源和历史，因为这些更能有助于培养创造性。一个较完整的数学和其他科技创造性工作的历史如图所示。

上述问题的解决依靠创造力，而

创造力＝有效知识量×发散思维能力×透视本质能力。

有知效识量提供了类比、联想、假设、想象所依赖的材料和范围，发散思维能力有助于提出新问题，孕育新思想，建立新概念，构筑新方法，透视本质能力标志研究者抽象思维力的高低，它决定了洞察事物本质的深度，也是一个十分重要的因素

---

这是作者与隋允康合作发表的论文，载于《高等工程教育》1987 年第 3 期，收入本书时作了文字上的校订。

# 人 名 索 引

（这里列出本书中出现的外国数学家人名中英文对照，中文译名后的数码为第1次出现该人名的页码）

## 徐利治教授已出版的著作

《数学分析的方法及例题选讲》

(高等教育出版社，1955，1958，1983 修订版，获 1988 年国家优秀教材奖)

《渐近积分与积分逼近》

(科学出版社，1958，1960 第二版)

《高维数值积分》

(科学出版社，1963，1980 增订本，获 1982 年国家自然科学三等奖)

《函数逼近的理论与方法》

(上海科技出版社，1983)

《计算组合数学》

(上海科技出版社，1983)

《应用解析数学选讲》

(吉林人民出版社，1983)

《数学方法论选讲》

(华中工学院出版社，1983，1988 第二版)

《组合数学入门》

(辽宁教育出版社，1983)

《高维数值积分选讲》

(安徽教育出版社，1985)

《逼近论方法》

(国防工业出版社，1986)

《关系映射反演方法》

(江苏教育出版社，1989)

**即将出版的有：**

《现代无穷小分析导引》

(大连理工大学出版社)

《数学与思维》

(湖南教育出版社)